

In Cattedra con Gesù

Di
prof. Franco Franceschini*

Sito web: <http://www.francofranceschini.it>

07/2006

Capitolo 6. Il dono nel percorso didattico

Considerazioni generali

Il presente capitolo esprime la parte maggiormente significativa e concettualmente più delicata riguardando il tema didattico tenendo conto dell'azione del dono carismatico che si esplicita attraverso tutte quelle forme di ispirazione cristiana che sono state tratteggiate nei capitoli precedenti. L'autore tiene a dichiarare che tali riflessioni sono state effettivamente utilizzate nel percorso didattico da lui intrapreso negli anni di insegnamento ottenendo un discreto risultato a livello di interesse e assimilazione delle linee generali della materia fornendone una visione sostanzialmente nuova ed accattivante. E' ritenuto comunque opportuno richiamare come tale posizione didattica sia stata presentata non come unica verità, ma come riflessione aperta a qualsiasi forma di critica. Anche il realizzarsi di tale procedura non ha mai voluto apparire come valori preconcepi e programmati, ma come spontanei inserimenti lungo il percorso didattico. Ciò spesso ha dato origine a interessanti confronti tra docente e studenti. Questa prassi esprime la dimensione di una testimonianza cristiana inserita nella normalità degli atti consoni alla propria professione. Il cristiano non può esserlo part-time ma è testimone delle verità evangeliche ogni volta che il carisma glielo suggerisce. A completamento di ciò viene riportato sia il concetto di cultura fatto proprio da madre Chiesa che lo scritto evangelico di San Giovanni 15,9 che rispettivamente sottolineano l'importanza della condizione cristiana nei confronti della scienza in genere e della cultura tecnologica in particolare e del sostegno dettato dallo

*I diritti d'autore sulla paternità dell'opera appartengono al prof. Franco Franceschini secondo le disposizioni della **legge 633/41**

stesso credo evangelico nei confronti della testimonianza vista nella condivisione espressa dall'amore fraterno. Tutto ciò esprime i fondamenti nei confronti della scelta di taglio cristiano come linfa vitale nell'attività didattica.

Gli effetti didattici dovuti al riconoscere Gesù in classe durante la lezione

L'autore nella sua veste professionale è testimone di quante volte viene presentato il seguente problema didattico: come si può fare per suscitare vero e nuovo interesse per lo studio e in particolare della matematica ai giovani? In linea con l'esperienza della quale il libro vuole essere testimonianza la risposta che il professore Franceschini fornisce in base alla propria esperienza è di due valenze apparentemente disgiunte ma a suo parere coincidenti sotto il profilo della loro complementarità.

1. fornire agli studenti delle riflessioni di autentica onestà intellettuale e cioè nel ricercare limiti dell'uomo nei confronti del sapere in genere indicando come unico e autentico valore quello del confronto rispettoso del parere altrui. In tale percorso va sottolineata la dimensione della fratellanza che ci unisce a uno stesso Padre espresso dai limiti precedentemente dichiarati. È proprio il riconoscimento della paternità intesa come tali limiti sia nella comprensione che della fattività materiale di un progetto che permette l'apertura verso il trascendentale. Tale dimensione dà origine all'interno della classe ad uno stato che contemporaneamente soddisfa la curiosità con una ricerca non presuntuosa ma indirizzata ad una maggiore apertura verso il vero. Il vero quindi non inteso come raggiungibile ma come percorso che si sviluppa attraverso la modestia e la fratellanza. Il motore che permette tale realizzazione è quel desiderio che vuole la condivisione della felicità, esso si chiama amore. La consapevolezza di tale parola permette la disvelazione della presenza di Nostro Signore unico figlio di quel Dio che è appunto definito caritas (amore). Anche la matematica deve quindi essere presentata non come qualcosa prodotto dall'uomo, ma come un preziosissimo dono che permette di percepire informazioni al di là dei semplici sensi ordinari, come ad esempio perché siano vere le leggi logiche tipo $1 + 1 = 2$ o quale sia la vera natura dei numeri o il motivo per il quale si debba accettare la logica induttiva-inferenziale etc. Vengono quindi sottolineate le caratteristiche di collimazione di concetti apparentemente distanti ma che trovano invece una loro magnifica sintesi come ad esempio la goniometria con la risoluzione dei triangoli, le sue applicazioni col mondo della fisica, legami tra funzioni esponenziali, goniometriche, logaritmiche sia nel campo reale che complesso ecc, tutti argomenti scoperti in tempi diversi e per temi diversi. Anche gli appuntamenti storici delle varie scoperte matematiche sfuggono dalla comprensione razionale sottolineando ancor di più il messaggio che perviene dall'oltre. Ne sono esempi aver riunito con il calcolo infinitesimale del XVIII secolo ed oltre temi matematici fino all'ora così distanti e riuniti ora in operatori come la derivata l'integrale e gli sviluppi in serie. Il sottolineare ed evidenziare tali caratteristiche non razionali che sono alla base della matematica suscita uno stato di meraviglia che sollecita a sua volta l'interesse e l'innamoramento verso lo straordinario. **È importante far notare come tutto ciò generi nella classe**

uno stato di gioia trasformando atteggiamenti di apatia o disinteressamento in effettiva partecipazione. Si ottiene così un armonioso rapporto generato e tenuto insieme non da banali raggiungimenti di conoscenze dovute o imposte, ma come **un convivere** una verità che ha nel dono, che apre le porte della felicità, il suo unico fine. Si sottolinea ancora come l'aspetto di gioia, cioè lo star bene insieme per la ricerca del vero sia opera dello Spirito Santo.

2. quanto esposto nel punto 1 suscita nella classe un nuovo porsi nei confronti del proprio insegnante e della materia che egli rappresenta. Man mano nel tempo pur rimanendo fermo il rapporto di rispetto professionale e istituzionale si viene a creare una nuova veste di collaborazione basata su autentici atteggiamenti. Ciò rende più significativo e quindi più produttivo il procedere dell'insegnamento. Si aprono nuove strade anche di approfondimento su temi culturali spesso affini tra di loro o con la materia studiata. Il valore maggiore che però viene prodotto è comunque dovuto al sentirsi coinvolti nei valori evangelici di Nostro Signore che producono effetti di vera fratellanza che vanno oltre il rapporto in classe e che permangono anche al di fuori della sede scolastica. Ciò indica come la presenza di Gesù in classe metta in atto dei valori che contribuiscono oltre a un accresciuto interesse scolastico verso la materia anche all'interno della vita stessa. In conclusione la presenza di Nostro Signore in classe si manifesta ogni volta che l'insegnante o gli studenti in personificano il ruolo di "farsi l'altro". Il docente davanti al proprio studente aiutato dalla Misericordia ne comprende il profilo umano e con amore deve utilizzare tutta la propria conoscenza e sensibilità per far sì che la materia che insegna sia assimilata come **cosa buona e giusta**. Lo studente avvertendo tale posizione riconosce in questo la presenza di Nostro Signore e la sua anima si rende disponibile all'ascolto e all'assimilazione.

LA CULTURA NELLA VISIONE CRISTIANA

Si riporta il concetto di cultura indicati dal Concilio Vaticano II nella Costituzione *Gaudium et spes*, vale a dire: *la cultura va intesa come tutti quei mezzi con i quali l'uomo affina ed esplica le molteplici sue doti di anima e corpo, procura di ridurre in suo potere il cosmo stesso con la conoscenza ed il lavoro e rende più umana la vita sociale sia nella famiglia che in tutta la società civile, mediante il progresso del costume e dell'istituzione, comunica e conserva nelle sue opere le grandi esperienze e aspirazioni spirituali perché possano servire al progresso di molti, anzi di tutto il genere umano.* Inoltre dal dizionario teologico enciclopedico PIEMME si ricavano i seguenti stralci del concetto di cultura condiviso da madre Chiesa: *mediante la cultura ognuno partecipa del progresso, della storia e della società, perché imprime con il suo lavoro personale e con l'esplicitazione delle sue doti spirituali e umane, un orientamento che crea sviluppo. La fede vuole partecipare alla dinamica della cultura immettendo in essa i principi fondamentali che costituiscono un vero e globale umanesimo; per questo si parla di **inculturazione del Vangelo**. Particolarmente significativo alla luce della realtà tecnologica attuale il seguente richiamo: poiché le culture sono fortemente segnate dalla tecnica e dal progresso scientifico, la fede da parte sua, non dovrà venir meno nell'indicare in senso più ampio del vero progresso che non può*

essere limitato alle sole forme immanentistiche. La cultura e la fede quando tendono al bene ultimo e vero dell'uomo non possono entrare in conflitto; devono riconoscersi reciprocamente almeno sulla base di questa aspirazione comune che li pone al servizio dell'**autentico progresso duraturo dell'umanità.**

DAL VANGELO SECONDO SAN GIOVANNI 15,9

L'amore cristiano: "come il Padre ha mandato me, così io ho mandato voi. Perseverate nell'amore mio. Se osserverete i miei comandamenti, persevererete il mio amore, come io ho osservati i comandamenti del Padre mio e rimango nel suo amore. V'ho detto queste cose, affinché in voi dimori la mia gioia, e la gioia vostra sia piena. Questo è il comandamento mio che vi amiate scambievolmente come io ho amato voi! Nessuno ha amore più grande di colui che sacrifica la propria vita per i suoi amici". "Voi siete miei amici se farete quello che vi comando. Non vi chiamo più servi, perché il servo non sa quel che fa il padrone; vi ho chiamati amici, perché vi ho fatto conoscere tutto quello che ho udito dal Padre mio. Non siete voi che avete eletto me, ma io ho eletto voi e vi ho destinati, perché andiate a portare frutto, e il vostro frutto sia duraturo; affinché qualunque cosa voi chiederete al Padre in nome mio, Egli ve lo conceda. Questo vi comando: di amarvi scambievolmente".

RIFLESSIONE

Si ritrova in queste parole evangeliche sia il passaggio di missione dal Figlio all'uomo che il mettere a frutto i doni contenuti nell'atto di fede che nel presente contesto sono rappresentati dalla sensibilità verso la cultura matematico-scientifica. Inoltre tale atto di insegnamento è uno dei modi con i quali i fratelli in tal caso insegnante e studenti si possano amare reciprocamente come fatto essenziale per la ricerca della verità. Il tutto rientra nel rendere partecipe nella quotidianità la parola e la verità del Cristo. Le parole evangeliche fanno intendere altresì come il procedere in tal senso sia duraturo e sia la premessa per un progredire consapevole anche nella direzione della futura comprensione. Ciò esprime la forte dimensione propedeutica dell'insegnamento così considerato nei riguardi della continuazione degli studi e in genere della propria vita.

Il capitolo viene suddiviso nei seguenti paragrafi:

1. Considerazioni relative alla didattica
2. Unità didattiche

Considerazioni relative alla didattica Il paragrafo ospita alcune considerazioni dell'autore che intendono essere elemento propedeutico e di introduzione al taglio didattico presente nei moduli che seguiranno. Già nel profilo dell'autore del libro è presente un modo di porsi nei riguardi della comprensione ispirato da un senso di modestia generato dalla consapevolezza dei limiti umani espressi sia da una convinzione di buon senso che dagli elementi di fede cristiana. Tale concetto riguardante i limiti della conoscenza non

esprime uno stato di sudditanza in senso limitativo rispetto al vero della comprensione, ma anzi genera nell'autore un desiderio di percorrere il dono dell'intelligenza in tutti i suoi aspetti che concorrono a svelare quella verità che risponde pienamente alla motivazione dell'esistere in senso della condivisione di tutti quei valori che arricchiscono il rapporto di fraternità e di collaborazione fra gli uomini come richiamato nelle lettere encicliche "Gaudio et spes" del Concilio Vaticano II e nella "Pacem in terris" di Giovanni XXIII promulgata nel 1963 e della quale sono stati presentati precedenti richiami. In tal modo la posizione dell'autore nei confronti del mistero, in qualsiasi modo esso si presenti e quindi anche come oggetto nello svolgimento del percorso atto alla spiegazione e all'acculturamento relativo alla fase scolastica, non è rinunciatario, ma di coinvolgimento attivo rinunciando alla presunzione ma restando nei limiti delle capacità umane che comunque esprimono il grande dono dell'intelligenza, in quanto significa poter interligere, cioè leggere attraverso, escludendo l'arroganza di ritenersi autore dell'oggetto di tale lettura. Quindi sotto l'aspetto allegorico l'autore ritiene che qualsiasi fenomeno della vita non sia generato dall'uomo ma esso possa solo interpretarlo secondo l'etica del ringraziamento ottenendone una visione appagante nel suo divenire. Restando a livello di esempio e come se il dono della vita esprime l'esistenza di un libro il quale assume la prerogativa di strumento di informazione solo se si sfogliano le sue pagine e mettendo a disposizione la conoscenza e l'intelligenza nell'atto di lettura da parte dell'uomo. Quindi anche se il libro nella sua dimensione di oggetto non è prodotto dall'uomo ma solo con il suo libero arbitrio dovuto alla misericordia di Dio esso trasforma l'oggetto libro, in libro come strumento di informazione. Sostituendo il concetto di libro con quello di fenomeno, all'uomo è dato di esserne coinvolto per trasformarlo da fatto valido di per sé a qualcosa di interpretativo e vitale. Anche le applicazioni di tale lettura (tecnologia) viene collocata in un ambito di riconoscenza. In tale riconoscenza trova alloggio la stessa energia intellettuale che permette il continuo divenire nella direzione del vero progresso accennato in precedenza. Tale riflessione indica i presupposti di carattere etico religioso sui quali poggiano le forze di ispirazione, progettazione e attuazione del percorso didattico. In particolare l'autore si concentra sul fenomeno presente nella vita che va sotto il nome di **matematica**, considerando quindi tale oggetto nella sua veste di dono che indica anche la sua natura di aiuto nel percorso del progredire della storia dell'uomo. L'autore ritiene centrale nell'attuazione del percorso didattico il richiamare il significato etimologico di alcune parole presenti nella spiegazione dei concetti in quanto l'etimo può essere visto come una sorta di cordone ombelicale che unisce la parola alla sua matrice di verità. Infatti *étimo* viene dal greco *éthymos* che è interpretato come *reale, vero e quindi significato*. Quindi senza una riflessione sul significato etimologico delle parole non è possibile alimentare quella forma di sapere che è detta consapevolezza di ciò che la parola esprime. La consapevolezza quindi unisce le due realtà contenute nella parola: *semiologica* cioè come segno e quindi vista come simbolo grafico fonetico e la sua dimensione *semasiologica* cioè di significato. E' quindi la consapevolezza la responsabile del riportare il vero delle parole alla comprensione del soggetto che la legge e quindi fissandola attraverso il compiacimento all'esperienza esistenziale bypassando lo sforzo di una memoria solo mnemonica. Quindi l'etimo funge sia da stimolo interpretativo che come pagamento equo del prezzo costituito dal ritenere il concetto in esame. A tale proposito si richiama il significato della parola matematica proprio per essere coinvolti dal suo significato

più profondo. *Matematica* proviene dal greco *mathematike* che è costituita da *mathema* che significa insegnamento che proviene a sua volta da *manthano* che significa imparo e da *tekhne* che significa arte la cui significazione richiama il concetto di ordinare. Quindi la parola matematica può essere tradotta nel seguente modo *imparare per insegnare l'arte e con arte*. Più semplicemente è la materia che insegna ad imparare correttamente, quindi alla base di un qualsiasi percorso che tenga conto dell'ordine accompagnato dall'etica dell'apprendimento. Questo è un esempio significativo di come una definizione etimologica modifichi il concetto che si è venuto a radicare nell'opinione generale. Infatti ordinariamente per matematica si intende quella materia che studia ed applica proposizioni logiche razionali, mentre invece come visto essa ha anche una dimensione di operatore educativo-formativo. Nell'esperienza didattica si è verificato che proprio tale traduzione etimologica è servita come prima apertura ad un nuovo interesse nei confronti del suo porsi da parte degli studenti verso di essa. Restando nell'area della matematica si ritiene che il concetto di numero occupi un ruolo primario per condurre l'interesse dello studente verso quei significati non sempre di facile accesso alla comprensione razionale. Infatti lo sforzo didattico nei loro confronti viene esplicitato e risolto facendo notare che essi non hanno un aspetto sensoriale, cioè non hanno peso, non hanno un colore né sapore né suono, risultando quindi non percepibili ai sensi, ma comunque eccezionali protagonisti della dimensione sensoriale in quanto senza di essi non sarebbe possibile concretizzare alcun tipo di fenomeno nell'ambito della realtà umana. E come se i numeri fossero l'energia invisibile degli oggetti sensibili alla percezione dell'uomo. A tale proposito si richiamano le due definizioni di numero date rispettivamente da Pitagora *il numero è la cosa*, e da Platone *il numero è l'essenza della cosa*. Già questa informazione crea il primo limite nella comprensione definitiva dell'ente numerico e quindi nei riguardi di tutto ciò che ne consegue nella dimensione matematica. Ciò arricchisce di un alone di meraviglia il tessuto pedagogico-didattico ponendo lo studente in condizione di curiosità intesa in senso esistenziale. Restando nel tema si riportano come esempio le seguenti riflessioni sulla parola *numero*. Una prima riflessione è quella che richiama la dimensione divina espressa dal ritenere che tale definizione provenga dalla dea Nemi che era considerata colei che secondo giustizia distribuiva territori e bestiame alle varie tribù latine tenendo conto delle esigenze e della quantità dei soggetti che ne facevano parte, quindi in base al concetto di proporzione. Ne deriva una collocazione del numero al di sopra della prepotenza e della violenza umana e quindi come legge che attraverso la volontà divina diviene equità tra gli uomini. Quindi la conoscenza del significato della parola numero in questa accezione fa sì che lo studente collochi questo ente come protagonista di una realtà al di fuori della connotazione umana assumendo l'aspetto di dono proficuo in quanto capace di riportare l'uomo su un percorso fattualmente positivo liberandolo dalle caratteristiche individuali e sociali dell'umanità. In ciò si colloca la dimensione di consigliera etica in cui si identifica la matematica nei confronti dell'umanità e non viceversa. Ciò è un ulteriore rafforzativo della giustificazione di un atteggiamento di umiltà dell'uomo nei confronti di essa. Il docente sposa quindi il modello secondo il quale le cosiddette scoperte matematiche sono in realtà una attenta e umile lettura di questo dono. Il contributo dell'uomo è espresso tramite il suo libero arbitrio in funzione del quale si evidenziano questi doni e quindi in senso allegorico è come se l'uomo sottolineasse i concetti già scritti nel libro della matematica. Il risultato delle suddette riflessioni porta l'insegnante a presentare la materia come

un oggetto del quale non è possibile conoscerne la globale essenza. Il professore ama identificare questo come un tavolino a tre gambe delle quali due sono espresse rispettivamente dalla cognizione delle definizioni degli oggetti matematici e dai teoremi mentre la terza esprime la dimensione dall'uomo incomprensibile cioè mistica esprimente la linfa che Dio ha profuso nella matematica nel suo atto di amore verso l'uomo. Il tavolino in mancanza di una delle tre gambe non sta in piedi o vi sta in senso precario non potendo così assolvere al suo compito. Analogamente se nella matematica non vengano considerate tutte le tre componenti essa non potrà fornire un autentico apporto allo sviluppo dell'umanità o potrà solo apparire in senso precario e ingannevole. Ciò vale anche nei confronti dell'insegnamento di questa materia: privandola infatti della dimensione mistica essa apparirà carente della sua dimensione originaria suscitando nello studente una situazione di incomprensione che spesso si trasforma in indifferenza. Viceversa la presentazione completa genera nell'ascoltatore una dimensione di equilibrio sorretta da una riflessione di buon senso generata dall'onestà intellettuale dell'insegnante. A differenza di quanto può sembrare è proprio il porre il limite di comprensione nei confronti di questa materia che genera quella reazione di giusta provocazione che è motore di sano coinvolgimento e di ricerca didattica-pedagogica. Ciò in qualche modo rende comprensibile quella dimensione di autonomia che ha la matematica nei confronti di una data ricerca. Infatti spesso è stato lo stesso algoritmo matematico a svelare fenomeni e leggi del mondo fisico e non solo non direttamente appartenenti alla volontà del ricercatore. Ne sono un esempio rispettivamente la scoperta delle correnti indotte nel circuito elettrico e quella dei punti ciclici del piano. Si sottolinea quindi come l'aspetto sconosciuto della matematica operi in autonomia servendo da battistrada nella ricerca. Un'altra riflessione sul concetto di numero nasce dalla sua interpretazione greca di arithmos. Ciò indica il significato di fermare uno scorrimento (ritmo). Quindi il numero è visto come una sezione statica del fluire relativo al divenire del fenomeno. Questa definizione rende il concetto di numero più prossimo alla sua definizione attuale. Tramite queste riflessioni lo studente è portato ad assumere un ruolo che da passivo auditore diviene attivo coprotagonista insieme al docente rispetto alla trama didattica. Emerge da ciò una interpretazione pedagogica-didattica che vede nel porre il tema della matematica come valore prezioso per il quale è giustificato quell'atto di volontà che tende ad annullare quella pigrizia mentale conaturata con il soggetto studente. Un altro metodo didattico ritenuto vincente in base all'esperienza al fine di far comprendere questa materia valorizzandone il carattere segreto in essa contenuto è nel considerare durante lo svolgimento di un dato argomento sia la sua collocazione storica che il riferimento esistenziale degli autori corrispondenti ai matematici che hanno partecipato alle basi teoriche di tale argomento ai quali si rimanda nel capitolo ad essi destinato. Queste due ultime azioni didattiche trovano un'ulteriore valorizzazione nel considerare gli appuntamenti storici delle scoperte avvenute in località geografiche e in realtà etniche molto diverse e incomunicabili tra di loro. Anche questo collabora a fornire una dimensione di non facile comprensione esaltando l'aspetto mistico non solo delle scoperte in sé ma anche della loro connessione spesso di carattere complementare. Si sottolinea come tali appuntamenti non possano essere compresi né utilizzando una logica razionale né un modello casualistico che rientri nelle norme dei modelli probabilistici e quindi deterministici sottolineando ancora una volta la loro dimensione di mistero. Non rientrando in questi due modelli i suddetti incastri sfuggono da qualsiasi

interpretazione umana appartenendo solo a quella mistica. Da qui l'aspetto apparentemente involontario della sinergia contenuto nel divenire storico della realtà matematica. Questo aspetto assume un forte contributo nel coinvolgimento dello studente nei riguardi della materia. E' spontaneo l'invito a considerare la seguente dimensione prospettica posta in chiave allegorica. Il tempo storico può essere compreso come l'acqua che scorre in un largo fiume. Le scoperte matematiche rappresentano gli oggetti trasportati dalla sua corrente. Un osservatore posto sulla riva non ha modo di avere di essi una visione completa, ma ne osserverà solo alcuni, quelli a lui più vicini. Più in alto è l'osservatore, maggiore sarà la capacità panoramica di poter osservare più oggetti. Nella posizione ottimale noterà la globalità di tali oggetti comunque separati l'uno dall'altro. Ciò corrisponde alla prospettiva storica che in un primo momento non riesce a evidenziare tutte le varie scoperte e comunque le osserverà disgiunte. Oltre la dimensione prospettica vi può essere quella dinamica. Richiamando l'esempio del fiume una sua ristrettezza dà origine ad un aumento di velocità accompagnato da un fenomeno di avvicinamento tra le correnti presenti nel fiume. Così in certi momenti storici vi è una accelerazione nel progredire e quindi le scoperte matematiche tendono ad avvicinarsi più rapidamente fornendo in definitiva una aggregazione interpretata come corpo matematico. Anche in questo caso la dimensione mistica è espressa dal fatto che le scoperte teoriche inizialmente disgiunte trovino delle felici unioni attraverso incastri perfetti. Un'interpretazione di buon senso ipotizza un unico artefice di tale sistema. Quanto descritto può essere usato nel far cogliere allo studente gli eventi matematici che si sono presentati nella storia appartenenti a regioni completamente diverse sia nel tempo che nello spazio. Questo fenomeno di giusta apposizione tra le varie realtà matematiche sia temporali, spaziali che concettuali si possono far rientrare nel concetto di *armonia* già espresso da Pitagora e da altri pensatori classici. Si richiamano a tale proposito alcune definizioni di Eraclito frammento 8 "*Ciò che in sé cozza, s'accorda e dai differenti toni nasce la più bella armonia e tutte le cose nascono in seguito ad armonia*", da Filolao "*l'armonia è la unificazione di cose mescolate assieme e consonanza di diverse combinazioni*". Per i pitagorici il numero deve essere amato per il sentimento dell'ordine e dell'armonia in quanto esso richiama l'ordine morale e l'armonia musicale. Il valore numerico deve anzitutto essere visto e sentito per qualcosa d'altro, prima che esso possa venire astrattamente risolto. In buona sostanza c'è accordo nella concezione dell'armonia come **concordanza dei contrari**. L'armonia assume una connotazione di terzo elemento tra i due contrari divenendo operatore di sintesi. Ad esempio da Eraclito l'armonia è vista come la più potente delle forze, viva, concreta, presente anche nella materia e nell'universo tutto. Essa agisce al fine di comporre i dissidi tra le cose, insinuandosi tra esse. Ci si può riferire ad essa in dimensione di sensazione, ma non di conoscenza. All'armonia è legato anche il concetto dinamico dello sperimentare in quanto essa non è definibile univocamente ma essa stessa è il senso della viva e feconda azione dello spirito nella materia: vedere e sentire, non definire (da Eraclito e la civiltà mediterranea, Gerardo Fraccari, ed. L'età dell'acquario, Brescia editore Torino). Si è verificato come tale atteggiamento di riflessione abbia avuto un forte ruolo pedagogico nel suscitare nello studente ancora una volta la dimensione di meraviglia che si traduce in un sentito coinvolgimento nei confronti dell'approfondimento e nella ricerca di esempi di armonie all'interno dei temi matematici trattati nel corso dell'iter didattico. Ne sono esempi significativi:

1. l'introduzione del concetto dello zero da parte di diverse popolazioni come i Maya, gli Egiziani e gli Arabi. Questo è un esempio della concezione di una stessa grandezza da parte di realtà etniche tra loro disgiunte;
2. un altro esempio è espresso dalla possibilità di uguagliare la scrittura frazionaria di un numero con la sua scrittura decimale. Nella conoscenza matematica attuale ciò è assimilato dai primi anni di scuola, ma riflettendo è proprio l'armonia che permette di sintetizzare tali diversità attraverso l'uguaglianza fra due forme di scrittura apparentemente differenti. Ad esempio la scrittura frazionaria del numero 2 diviso 3 ($\frac{2}{3}$) trova la sua equivalenza nella scrittura decimale 0.6666... Tale equivalenza è un elemento di grande importanza nel calcolo numerico;
3. un esempio di risoluzione armonica centrale nella matematica contemporanea è quella tra punto e numero che per secoli sono stati considerati enti completamente diversi e contrastanti. Il punto infatti è un ente geometrico, ma esso si identifica con una ennupla di numeri (le sue coordinate in uno spazio), ad esso associate. Ad esempio con la scrittura $p(1,2)$ si intende esprimere il fatto che il punto p nello spazio a due dimensioni coincide (si armonizza) con la coppia numerica ordinata 1,2. Generalizzando ciò permette la gestione analitica della geometria e viceversa con eccezionale beneficio nella scienza;
4. l'introduzione del numero immaginario da parte di Bombelli alla fine del Quattrocento come contributo alla risoluzione delle equazioni algebriche di terzo grado poi ampliati concettualmente da Gauss nella fine del Settecento dando origine ai numeri complessi. Gli stessi numeri trovano una loro rappresentazione utilizzando elementi di goniometria, della teoria esponenziale e del modello matriciale. Il modello dei numeri complessi si colloca attualmente nel campo delle applicazioni in special modo elettroniche e nella robotica. Questo è un esempio di come dei concetti matematici: equazioni algebriche, teoria dei numeri, goniometria, esponenziali e algebra delle matrici, inizialmente diversificati nel loro aspetto concettuale, successivamente hanno confluito in uno stesso corpo matematico come richiamati da un mistico appuntamento storico. E' interessante sottolineare "il perfetto incastro" quindi armonico fra le varie teorie matematiche;
5. E' significativo come alcuni aspetti del calcolo infinitesimale introdotti da Leibniz (Lipsia 1646-Hannover 1716) come quello di infinitesimo, prendano spunto dal concetto di "monade" già presente nel pensiero pitagorico. Restando in campo del calcolo differenziale è sorprendente come due pensatori di nazionalità diversa l'inglese Newton, e il tedesco Leibniz che inoltre non si conoscevano direttamente siano giunti per strade diverse alla formulazione del concetto di limite e successivamente di derivata. Questo esempio sottolinea sia la discontinuità temporale (Pitagora 500 a.C., Leibniz 1600 d.C) rispettivamente rivolto alla monade all'infinitesimo e alla disgiunzione geografica e personale, espressa da Newton e Leibniz nella stessa scoperta;
6. un altro esempio di coincidenza fra aspetti diversi della matematica è quello che unisce la funzione goniometrica seno con la serie esponenziale di Mac-Laurin. Oltre

che alla differenza concettuale tra il seno e la serie che viene recuperata dall'uguaglianza di Mac-laurin è presente anche una notevole differenziazione storica in quanto la funzione seno è di origine araba che si fa risalire circa all'800 d.C. rispetto allo sviluppo di Mac-Laurin collocabile nel XVI secolo;

7. un'ultima attenzione merita in tempi più recenti il fatto che lega il matematico Srinivasa Ramanujan vissuto nei primi anni del XX secolo. Il personaggio privo di un'istruzione formale riuscì comunque in un approccio particolarmente significativo nei confronti della teoria dei numeri primi. La cosa straordinaria rientra nel fatto di aver creato una propria matematica con la quale giungeva a risultati simili se non superiori a quelli sviluppati a Cambridge dal noto matematico Hardy. Si fa notare come i suoi lavori siano tuttora utili nelle formule crittografiche. Questo esempio fa comprendere anche in questo caso il recupero su realtà geografiche e culturali relativo al fenomeno matematica e come questa materia possa essere in qualche modo considerata presente, ma invisibile nella realtà umana ma comunque percorribile e interpretabile con metodi diversi. Ciò richiama ancora il concetto di armonia espresso da Eraclito riconoscendo in essa ciò che è gestito dalla matematica come sua dimensione invisibile e quindi mistica.

Si potrebbe continuare con altri esempi. Quanto esposto sottolinea ancor di più come la matematica possa essere vista come un dono mistico a disposizione equamente dell'umanità in modo universale. In una prima lettura quanto precede potrebbe apparire scollegato dai contenuti di ispirazione cristiana che invece animano l'esperienza didattica. Infatti si può riflettere sul fatto che le connotazioni di universalità rientrino nel modello cristiano in quanto si presenta in senso salvifico e gratuito per tutti ovunque e per sempre. Si richiama inoltre quanto riportato nella Genesi: *In principio Dio creò il cielo e la Terra. La Terra era una massa senza forma e vuota; le tenebre ricoprivano l'abisso e sulle acque aleggiava lo spirito di Dio.* In tale spirito si può riconoscere anche il segno relativo al dono espresso dalla matematica come strumento che evidenzia l'armonia tra gli oggetti dell'universo, dono espresso anche dall'utilizzo di tale armonia per la ricerca della verità e quindi dell'evoluzione spirituale dell'uomo. Si ricorda in più come la Chiesa riconosca in Nostro Signore Gesù Cristo la natura consustanziale rispetto al Padre e nella sua esistenza prima dei tempi e di conseguenza presente dall'inizio della storia. Ciò è stato riconosciuto attraverso il Concilio Ecumenico di Nicea del 325. Altresì si richiama dal Vangelo secondo San Giovanni Prologo 1,1-1,5, **Divinità del Verbo**: *"In principio era il Verbo, e il Verbo era presso Dio, e il Verbo era Dio. Egli era in principio presso Dio. Tutto è stato fatto per mezzo di Lui, e senza di Lui, neppure una delle cose create è stata fatta. In Lui era la vita, e la vita era la luce degli uomini"*. In tal modo San Giovanni ascende all'eterna generazione del Verbo e non creazione. Il principio vuol dire prima di tutte le cose (Agostino). Per Verbo si intende sia la ragione, la parola che la divinità di Gesù Cristo. Lo scritto evangelico sottolinea come Nostro Signore sia sempre stato presente nella storia e tale presenza sia viva nei confronti del divenire nella sua totalità. Quindi anche la matematica presente in periodo precedente alla nascita storica di Nostro Signore risente comunque del contributo del Cristo. Quindi parlare di matematica precristiana è una imprecisione che può essere

accettata solo sotto il profilo storico-formale. Questi ultimi richiami sono di particolare interesse nel giustificare un porsi nell'interno dell'insegnamento dei valori cristiani posti non in modo esclusivo ma come materia di riflessione e crescita. Il ruolo dell'insegnante è quindi quello di testimone e operatore nella direzione della fede cristiana. Ciò è ribadito anche dall'importanza delle opere da parte della fede richiamata nella lettera apostolica di San Giacomo 2,14: **la fede è vana se non è accompagnata dalle opere**. *Fratelli che serve ad uno dire d'aver la fede, se non ne ha le opere? Lo potrà forse salvare tale fede? Se un fratello o una sorella sono nudi e privi di cibo quotidiano, e uno di voi dice loro: "Andate in pace riscaldatevi, nutritevi", senza dar loro il necessario per il corpo, a che giova. Così è della fede: se non ha le opere, è morta in sé stessa [...] come il corpo senza anima è privo di vita, così la fede senza le opere è morta*. Questo scritto evangelico in tal caso esprime le opere come azione dell'insegnante nei confronti degli studenti. La fede dell'insegnante è vana se tradotta attraverso i valori carismatici non servisse a fornire gli strumenti necessari a recuperare le necessità spirituali, intellettuali ed etiche dello studente. In ciò sta la dimensione salvifica dell'opera di insegnamento cristiano.

Nel paragrafo successivo si passerà ad illustrare attraverso specifiche unità didattiche il metodo di insegnamento che ha per finalità quella di rendere fattuali le intenzioni e dar vita a quanto descritto.

Unità didattiche Si riportano alcune unità didattiche facenti parte dell'effettivo percorso dedicato all'insegnamento che l'autore ha effettivamente sviluppato.

UNITA' DIDATTICA 1 - CONCETTI BASE: IL SIMBOLO, L'OPERATORE E IL LUOGO

Il simbolo

La matematica è una materia che si esprime attraverso simboli. Quindi è indispensabile fornire il significato etimologico di tale parola. Simbolo: *dal latino symbolum che indica la sua valenza di "contrassegno". A sua volta discende dal greco symbolon della famiglia di symballò che indica il "mettere insieme". Più in dettaglio può essere vista come l'associazione di: syn che indica il con e il ballò "getto o movimento". Quindi il significato figurato della parola simbolo può essere: fermare ciò che è in movimento. Un ulteriore ampliamento di tale concetto può essere quello di fermare (memorizzare) l'idea dinamica di un concetto. Quindi il simbolo può essere visto come il contenitore di un concetto rendendolo invariante rispetto al soggetto e al tempo. Ad esempio il simbolo del numero 3 "fotografa" il concetto che esprime il terzo numero intero nell'ordinamento naturale rendendolo oggettivo quindi uguale per tutti e indipendente dal tempo. E' importante considerare la categoria dei simboli aperti espressi in matematica dai **parametri** letterali compresa la variabile. In tal caso essi mantengono il significato di simbolo senza però avere inserito al loro interno un concetto determinato, ma solo un concetto nella sua potenzialità.*

Riflessione: l'aver posto l'attenzione sul concetto di simbolo fornisce un presupposto

fondamentale in quella dimensione che fa della matematica qualcosa di legato alla collocazione di un concetto non come fatto statico ma come **memoria** di ciò che in realtà è in movimento. In tale riflessione trova spazio anche il concepire una **rilettura** dei concetti e quindi di una loro evoluzione accompagnata da nuovi simbolismi.

L'operatore

Un altro concetto base è quello di **operatore**. Si intende dal punto di vista linguistico ciò che opera cioè esplicita l'azione di operare dal latino *operari*. Sotto tale aspetto esso indica quindi un lavorare, un eseguire per produrre. Nell'ambito matematico esso prende vita attraverso simboli come quello dell'addizione, sottrazione, moltiplicazione ecc. I simboli di tale operatori contengano i concetti espressi dalle proprietà dell'operatore. L'operatore a sua volta è un simbolo che contiene come concetto le sue proprietà. Esso produce agendo su uno o più elementi detti **originali** applicando le sue proprietà un nuovo elemento detto **immagine**. Infatti si parla rispettivamente di operatore unario, binario... a seconda del numero degli originali sui quali interviene.

Riflessione: è utile dal punto di vista informativo chiedersi **la natura del collante che permette l'associazione e quindi la elaborazione sugli originali da parte dell'operatore**. Restando tutto ciò in un ambito di assoluto misticismo si può richiamare comunque il concetto di forza tra monadi espresso da Leibniz.

Un'altra motivazione che può far comprendere la natura di ciò che associa gli elementi con l'operatore è quello legato alla **logica metaforica** detta **abduzione**, cioè quella forza psichica che unifica i fenomeni **in base alla loro somiglianza o analogia formale**. Il concetto di abduzione lo si deve a Gregory Bateson. L'operatore può essere visto inoltre come una forza di vivacità creativa nel senso di fornire in autonomia nuovi elementi. E' il caso ad esempio dell'operatore radice aritmetica che genera da numeri interi i numeri irrazionali. La radice del numero 2 è il numero 1,41... che è irrazionale, così pure l'operatore rapporto genera i numeri razionali non interi. Ad esempio $\frac{3}{2} = 1.5$. In entrambi i casi è l'operatore che genera nuove grandezze.

Riflessione: il concetto di operatore così diffuso in matematica e utilizzato ordinariamente per assolvere problemi delle più svariate nature, può essere invece riesaminato come un **attrattore mistico** di grandezze legate da stesse proprietà. La sua dimensione mistica lo porta ad assumere una significazione nell'**oltre**, valenza che lo pone come creatore di nuovi oggetti. Ancora l'operatore può essere visto come un passaggio che permette di accedere in una nuova realtà che diviene in seguito ad unirsi a quello che viene definito conoscenza. Tornando all'esempio precedente in qualche maniera è come se la radice aritmetica fungesse da telescopio (microscopio) per accedere ad una nuova parte dell'universo matematico (dal sistema dei numeri interi a quello dei numeri irrazionali). Per la sua dimensione creativa si può invece ritenere l'operatore come un tramite attraverso il quale lo spirito del mondo si compiace di evidenziare per volontà di Dio nuovi enti che arricchiscono la possibilità dell'uomo di accrescere il suo progresso inteso in senso civile. Si ricorda a tale proposito la frase di Kronecker: *"Iddio creò i numeri interi, il resto è opera dell'uomo"*. Questa frase può essere riletta riflettendo che anche l'opera dell'uomo

è comunque frutto del dono dell'intelligenza che Dio gli ha fatto in quanto l'uomo è stato creato a sua immagine e somiglianza. L'operatore può essere anche considerato come il protagonista privilegiato nell'ambito matematico in quanto senza di esso non sarebbe possibile assemblare più oggetti analitici non ottenendo così il **risultato del lavoro logico**: calcolo di superfici, intensità di corrente... Da questo punto di vista l'operatore esprime quel supporto efficiente ma fundamentalmente incomprensibile nella sua dimensione radicale che consente all'uomo di beneficiare dei **frutti del proprio impegno**. Da questo punto di vista l'operatore può essere inteso come la mano nascosta, ma sempre presente ed efficace di Dio a sostegno del progresso.

Il luogo

Il significato linguistico attuale di luogo è: *lo spazio in quanto è o può essere occupato sia in senso concreto che astratto*. Questa definizione può essere vista come l'evoluzione del concetto di logos. Questa entità è stata presa in considerazione per tutto l'arco della storia del pensiero umano in special modo riferita all'area occidentale. Riferendoci all'inizio della filosofia greca il logo assume la designazione di *logos*. In Eraclito esso esprime il principio vitale della realtà il quale è fuoco e ragione insieme. Per Platone **l'essere è logos** in quanto si articola **nell'ordine dialettico delle idee**. Per gli stoici il logos è **il soffio animatore che permea il tutto: ragione seminale (logos spermaticos)**. Per Plotino il logos è **la potenza ordinatrice del mondo, emanata direttamente dall'intelletto divino**. Filone di Alessandria chiama a sua volta logos **l'ipostasi intermedia fra Dio e il mondo, la quale funge da strumento e da tramite dell'atto creatore divino**. Nel Vangelo di San Giovanni è detto che **il logos si è fatto carne e abita tra noi: Cristo è dunque lo stesso logos divino, divenuto uomo tra gli uomini per consumare il mistero della redenzione**. Fichte nella fase religiosa del suo pensiero tornò a chiamare logos, insistendo sulla ortodossia cristiana di questa sua posizione, il divino che si manifesta uscendo da sé e **divenendo autocoscienza individuale e sapere**. Giovanni Gentile contrappone **il logo astratto da quello concreto**. Nel primo caso esprime il momento in cui è presente l'immobilità adialettica dell'oggetto. È importante sottolineare come la parola logica discenda già dall'inizio della storia del pensiero dal concetto di logos. Attualmente il concetto di logica e quindi di interpretazione del logos è quello di fornire all'uomo **una rigorosa chiarificazione dei suoi strumenti espressivi**. In matematica abbiamo la logica degli enunciati, la logica dei predicati e la logica dei predicati allargata. (Dal dizionario di filosofia ed.BUR). Tornando strettamente al concetto di luogo esso può essere interpretato come l'insieme di enti numerici o geometrici rispondenti a una stessa proprietà. Infatti la definizione dei vari enti è spesso espressa attraverso la denominazione di luogo. Esempio: la retta è il **luogo di tutti e soli i punti tali che da due di essi non coincidenti ne passi una e una sola**. Nel concetto di luogo come visto è implicito anche quello di logica, cioè di quel linguaggio che si ritiene avente un'unica significazione descrittiva e che quindi permette di rendere univocamente chiaro l'ente espresso dallo stesso luogo.

Riflessione: possiamo suddividere la riflessione in due suoi aspetti:

1. **dimensione esistenziale**: il concetto di luogo esiste solo nel momento in cui gli

si associa anche se solo idealmente una potenziale proprietà. Infatti non si può concepire il concetto di luogo senza la possibilità di utilizzarlo come sostegno della definizione legata ad una data proprietà. In definitiva la sua esistenza si identifica con la **proprietà** ad esso associata;

2. **dimensione mistica**: in questo caso ci si concentra su quel **fatto che rende possibile l'evincere la proprietà che poi genera il concetto di luogo**. Più esplicitamente: che cos'è che ci permette di eseguire **una lettura universale di un concetto, il che equivale a ciò che permette il riconoscimento di una generalizzazione di un preciso carattere**. Anche in questo caso ci possiamo richiamare a quel fenomeno di tipo psichico, **l'abduzione**, cioè la capacità di associare tra di loro caratteristiche in base a una loro analogia formale. Resta comunque una zona imprescrutabile che collega **il fenomeno luogo con la causa prima che lo rende possibile**. Ci risulta particolarmente significativo sottolineare che **comunque tale meccanismo si espliciti nella definizione e utilizzo del luogo**. Utilizzando quindi ciò che non conosciamo anche in questo caso il luogo può essere visto come dono essendo reso possibile al di fuori di capacità umane di comprenderne la genesi esistenziale.

Nella dimensione della fede cristiana richiamando quanto detto dal Vangelo secondo San Giovanni, Nostro Signore esprime il luogo che ha per proprietà la nostra salvezza. Non restando solo su tale significato, si può evincere che quel **"qualcosa" che rende possibile il logos è "la volontà di Dio"**.

UNITA' DIDATTICA 2 - CARDINALITA' ED EQUIPOTENZA

Cardinalità

Considerati due insiemi A e B costituiti rispettivamente dagli elementi A_i e B_k se esiste una legge di corrispondenza tale che ogni elemento di A è messo in corrispondenza bi-univoca con un elemento di B allora possiamo dire che gli insiemi A e B contengono lo stesso numero di elementi che esprime la loro cardinalità. Esempio: l'insieme A costituito da tre punti e l'insieme B costituito da tre rette hanno la stessa cardinalità che è espressa dal numero 3.

Riflessione: dall'esempio precedente si evince come la cardinalità esprima una caratteristica che esula dalla natura degli elementi, ma che li associa. Questo può essere interpretato come lo **spirito numerabile degli elementi**. Quindi se abbiamo gli elementi a, b, c lo spirito numerabile di essi è la cifra 3. Anche gli elementi d,e,f hanno lo stesso spirito numerabile quindi la stessa cardinalità dei precedenti. Ne risulta il motivo per il quale **possiamo contare attraverso i numeri interi qualsiasi successione di elementi**. Infatti **il contare significa attivare la corrispondenza detta cardinalità e quindi innescare il processo dello spirito numerabile degli elementi**. Tutto ciò non ha una giustificazione logica primaria, cioè non è possibile comprendere la causa e il meccanismo che permetta questo. Anche in tal caso emerge la dimensione di dono che c'è concesso perché si possa contare in modo indipendente dalla natura dell'oggetto che viene contato. **Ricordando**

che è lo Spirito Santo deputato al movimento, e essendo il contare un movimento logico in quanto si esprime nel tempo, attraverso la fede cristiana il contare e quindi la cardinalità è un dono che si manifesta attraverso lo Spirito Santo.

Equipotenza

Consideriamo ora due insiemi costituiti da infiniti elementi rispettivamente A e B. Se tra gli elementi di tali insiemi esiste una **corrispondenza biunivoca** essi si dicono **equipotenti** e ciò si indica $A \# B$.

Prima Riflessione: già nel concetto di insiemi di infiniti elementi vi è la prerogativa fornita all'uomo di **convivere** con ciò che non può delimitare con la propria mente, ma che comunque viene percepito come **oggetto vitale** nella sua completezza. Ciò è reso possibile in matematica dal processo di induzione che presuppone la non contraddizione tra un termine e il suo successivo riferito ad un processo logico (esempio: dato un numero intero ce ne sarà sempre uno successivo ad esso). Tutto questo può essere letto come una **vitalità** e quindi come forza che ingenera questo particolare **divenire che trascende la limitatezza**. Il carattere vitale di induzione può essere rafforzato anche attraverso l'etimologia. Infatti induzione scende dal latino *inductio* che esprime il nome **d'azione di indurre**. In specifico oltre al processo induttivo è presente quello di **confronto uno ad uno** che permette di **verificare la equipotenza tra i due insiemi**. Anche ciò può essere considerato come una **vista resa possibile da un apporto di straordinaria valenza**. Quindi sia il processo di **induzione** che quello di **relazione** rientrano in speciali doni dello spirito. Si rammenta infatti che questi concetti furono inseriti da George Cantor (1845-1918) dotato egli stesso di una forte spinta spirituale spesso indirizzata verso valori cristiani. Va detto comunque che Cantor esclude tuttavia la possibilità di usare la sua matematica **come strumento di prova su temi teologici come avrebbero voluto alcuni gesuiti**.

Tornando all'equipotenza l'insieme dei numeri naturali N viene considerato come l'insieme numerico definito **numerabile**. Ogni altro insieme numerico equipotente con esso è detto numerabile. È stato dimostrato che sono numerabili l'insieme dei numeri razionali (Q) attraverso il metodo per diagonali di Cantor. Per quanto riguarda i numeri irrazionali (Ir) si deve distinguere tra di loro i numeri: algebrici (Ra) e trascendenti (Rt). Un numero è algebrico se si ottiene come soluzione di un'equazione a coefficienti interi relativi e per esponenti dell'incognita numeri naturali maggiori o uguali a 1. Quindi sono tali tutti quei numeri ottenuti da estrazione di radice. In particolare si dicono numeri algebrici reali quelli non appartenenti ai numeri complessi. Esempio $\sqrt{3}$ è un numero algebrico reale in quanto soluzione dell'equazione $x^2 - 3 = 0$. È stato inoltre dimostrato che l'insieme dei numeri Ra è numerabile, quindi: $N \# Q \# Ra$. I numeri trascendenti sono quelli che non si ottengono come soluzioni dell'equazioni suddette. Ad esempio i logaritmi, il π , le potenze a esponente irrazionale e alcuni valori assunti dalle funzioni goniometriche. Si è dimostrato che l'insieme di questi numeri non è numerabile ed ha una potenza ad esso maggiore. Quindi l'insieme dei numeri irrazionali nella sua globalità: $Ra \cup Rt = Ir$ non è numerabile (causa i numeri Rt), ma ha una potenza maggiore di quella dei numeri N e Q . In definitiva possiamo affermare che l'insieme N e Q hanno la stessa potenza mentre l'insieme R comprendente quindi tutti i numeri reali compresi gli Rt non è nu-

merabile avente una potenza maggiore di quella dell'insieme N . Il concetto di **potenza** viene assunto come una nuova **cardinalità** relativa ad un concetto più ampio di numero detto **numero transfinito**. Quindi tutti gli insiemi equipotenti con N costituiscono il primo numero transfinito \aleph_0 (alefs con zero), quelli equipotenti all'insieme dei numeri reali R costituiscono il secondo numero transfinito \aleph_1 (detto numero del continuo). Cantor ha dimostrato che è possibile ottenere infiniti numeri transfiniti: \aleph_2 ecc. Con una scrittura ripresa dai numeri reali e applicata a quelli transfiniti possiamo scrivere $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 \dots$

Seconda Riflessione: riprendendo dalla prima riflessione si comprende in relazione a quanto ora detto come l'operatore spirituale non solo permetta il confronto tra **potenze diverse**, ma fornisca una sorta di **genesi intellettuale** che evidenzia la possibilità di concepire una **natura più evoluta di numero espresso dal transfinito di Cantor**. In ciò può essere riscontrata la dimensione **vivifica** dell'azione dello Spirito Santo come motore e luce dell'intelligenza umana attraverso la quale delle **pure astrazioni non sensoriali possono essere rese operative attraverso una loro algebra**. L'operatore spirituale mette in essere una capacità che evidenzia il concetto di **numero transfinito traducendo una proprietà (l'equipotenza) in definizione di numero, quindi di ente concettualmente finito e quindi gestibile**. Ancora tale operatore indica come direbbe Leibniz, **la monade del numero transfinito fissandola nella comprensione umana**.

Modello geometrico: un ulteriore ampliamento dell'argomento trattato riguarda la sua dimensione geometrica. Questo argomento può essere trattato in due aspetti diversi:

1. Aspetto strettamente geometrico. In tal caso gli elementi degli insiemi considerati sono rappresentati dai punti geometrici. La relazione tra di essi è espressa da proiezioni rappresentate da semirette passanti per esse. Secondo tale modello si possono considerare l'insieme A costituito dal segmento ab e dall'insieme B costituito dal segmento cd . I due segmenti possono avere la stessa lunghezza come lunghezze diverse. Nel primo caso è banale affermare che i punti del segmento ab e del segmento cd sono in corrispondenza biunivoca in quanto sovrapponibili. Nel caso in cui la lunghezza del segmento ab sia maggiore di quella del segmento cd , si potrà costruire una proiezione di polo p non appartenente ai due segmenti ma che proietta il segmento cd sul segmento ab creando quindi una **corrispondenza biunivoca e senza eccezioni** tra i due insiemi A e B rendendoli equipotenti: $A \# B$. Va sottolineato come la dimensione dei vari segmenti non influisca sulla loro potenza. Quindi infiniti segmenti di dimensioni diverse, tramite la stessa operazione di **proiezione** hanno tutti la medesima **potenza**. Questo fatto può essere esteso al **segmento infinito** (la retta). Si dimostra infatti che **qualsiasi segmento appartenente ad una retta è equipotente all'intera retta** e quindi ogni retta è equipotente ad ogni suo segmento;
2. Aspetto algebrico-geometrico. In questo caso ad ogni punto viene associato un numero reale rispecchiando la dimensione cartesiana. Utilizzando tale modello si ottiene il duale descritto nell'aspetto trattato precedentemente e relativo al fatto che il sottoinsieme dei numeri reali ha la stessa potenza di tutto l'insieme dei reali (R). In più tramite un artificio numerico è possibile dimostrare che l'insieme dei punti

del lato di un quadrato sono equipotenti con tutti quelli contenuti all'interno del quadrato. Con lo stesso procedimento si dimostra come l'insieme costituito da questi ultimi sia equipotente all'insieme di tutti quelli interni al cubo di cui quel quadrato è una faccia. Estendendo tale processo si ottiene che i punti di un segmento (il lato del quadrato iniziale), sono equipotenti a i punti interni all'ipercubo appartenente allo spazio a n dimensioni, con n grande a piacere. **In questo caso risalta ancora come la dimensione non influisca sull'equipotenza.**

Terza Riflessione: dall'ultima descrizione scende spontaneamente come la equipotenza esprima una caratteristica **invariante** rispetto alla dimensione geometrica. Essa quindi può essere intesa come un riferimento nella valutazione relativa all'ordine di infinito presente negli enti geometrici considerati. Tale riferimento costituisce una sorta di centro di simmetria nella quale la mente trova una sua adeguata collocazione. E' particolarmente significativo il considerare l'equipotenza come centro di una simmetria concettuale riferita essa stessa ad uno spazio a dimensioni sempre crescenti (l'ipercubo a n dimensioni). Da questo scende come l'equipotenza possa essere interpretata come **un motore che dilata lo spazio mentale in modo continuo mantenendo la simmetria**. A sostegno di quanto detto si riporta il significato etimologico di **potente**: dal latino *potens,-entis* viene tradotto con **far sollecitare o faccio indirizzare, dirigo**. In tale accezione la equipotenza fornisce un'uguaglianza nell'orientare nella direzione del concetto di **invarianza nelle relazioni tra infiniti**. Un altro modo di porsi all'interno della riflessione è quello di cogliere nell'**equipotenza** una stessa **capacità di attuazione e realizzazione** resa possibile dal dono dello spirito. Da qui **il riconoscimento di un'offerta (la possibilità di confrontare gli infiniti), da parte di Dio verso l'uomo permettendo così di mettere a fuoco l'equipotenza come strumento operativo e nello stesso tempo di liberare l'uomo dall'esperienza sensoriale** (indipendenza dalla lunghezza). Non sfugge comunque il messaggio per il quale l'ente infinito è presente in diverse forme geometriche mantenendone però la **potenza**, cioè ponendo in esse una stessa possibilità di evoluzione e di vita. Richiamando l'infinito al concetto di Dio, tale modello permette all'anima e poi alla mente di prendere atto della sua equicompreenza cioè esso è presente ovunque e nello stesso modo. Il messaggio definitivo è: **non farsi ingannare dalle diversità delle forme, ma riferirsi invece alla loro essenza divina**. Si conclude richiamando l'equipotenza tra un segmento limitato e tutta la retta reale illimitata cioè infinitamente estesa. La riflessione che ne discende, volendo far coincidere il segmento con la vita terrena e la retta con la vita ultraterrena può essere suddivisa in due parti:

1. la vita terrena è **ospitata in quella ultraterrena**, in quanto il segmento limitato appartiene alla retta illimitata. Questa riflessione rientra in alcuni passi del Vangelo nei quali si sottolinea come la vita sulla Terra sia un momento di una vita più ampia;
2. come la presenza di Dio è la stessa della vita terrena (potenza del segmento limitato) e in quella ultraterrena (potenza della retta). Tale constatazione può dare origine alla potenza **obbedenziale** che mira a chiarire il rapporto tra la natura umana e la grazia divina, più concretamente ad affermare e a delimitare le potenzialità della

natura rispetto alla concretizzazione della grazia. Nel corso dei secoli tale potenza è diventata l'espressione classica per determinare la posizione dell'uomo in quanto creatura di fronte all'iniziativa del tutto gratuita di Dio nella storia concreta della salvezza incentrata e rivelata pienamente nella persona e nella missione di Gesù Cristo. (da Dizionario Teologico Enciclopedico- PIEMME).

UNITA' DIDATTICA 3 - L'EQUAZIONE

L'etimologia della parola equazione discende dal latino *aequatio, -onis* nome d'azione di *aequare* **uguagliare**. In matematica l'equazione intesa in senso analitico è l'uguaglianza, verificata solo in alcuni casi, tra due scritture aventi un significato ben preciso espresso da simboli e regole prestabilite. All'equazione viene associato un insieme di definizione, cioè l'insieme dei valori che possono essere assunti dalle due scritture suddette. Ordinariamente le due scritture vengono dette **primo e secondo membro** rispettivamente quella a sinistra e a destra del segno di uguaglianza. In entrambi i membri sono presenti sia grandezze il cui valore è ritenuto noto e grandezze delle quali non si conosce il valore determinato. Le prime vengono chiamate termini noti e le seconde termini incogniti dell'equazione. Tali grandezze sono collegate tra di loro attraverso operatori definiti in precedenza comprese le loro proprietà operative. A loro volta i termini si possono presentare in forme algoritmiche diverse: algebriche, logaritmiche, esponenziali, goniometriche, di derivata, ecc. A seconda dell'algoritmo con il quale si presenta l'incognita, l'equazione assume la definizione corrispondente a tale algoritmo. Avremo quindi l'equazione algebrica, logaritmica, esponenziale, goniometrica, differenziale ecc. Richiamando l'insieme di definizione esso esprime sia le caratteristiche numeriche che possono essere assunte dai termini dell'equazione che il loro significato concettuale. Quindi, riducendo al caso di una sola incognita, essa può significare un valore numerico, geometrico, fisico ecc. Interessa sottolineare come l'equazione sia essa stessa un simbolo costituita da simboli (i suoi membri e i termini). Richiamando il concetto di simbolo cioè ciò che ferma un concetto emerge come l'equazione assuma la sua connotazione concettuale attraverso l'accettazione formale dei concetti che la costituiscono attraverso le rispettive etichette simboliche.

Prima Riflessione: dalla definizione scende come l'equazione esprima una associazione di significati che si aggregano tra di loro sia attraverso gli operatori che i termini realizzata dall'azione del porre un'uguaglianza. Considerando in un primo momento solo l'espressione di **membro dell'equazione**, esso acquista la sua prerogativa formale attraverso quelle **forze concettuali** che coinvolgono in modo sinergico i termini e gli operatori corrispondenti. Come già visto nel concetto di operatore questa forza non è comprensibile razionalmente ma solo accettabile come prodotto di un **super empirismo**. Un secondo momento della riflessione si incentra sul concetto dell'**azione nell'uguagliare**. Esso gioca un ruolo esistenziale in quanto responsabile della definizione stessa di equazione. Quindi nell'**atto d'azione costituito dal rendere uguali è ospitato l'atto vivifico cioè che rende possibile l'esistenza considerata come vita dell'equazione**. Anche in tale atto è presente una forza non razionale che può essere interpretata come un dono gratuito che Dio of-

fre allo spirito dell'uomo. Tale dono è appunto il **concetto di equazione**. E' interessante concentrare l'attenzione sul simbolo che unisce i due membri. Essendo rappresentato dall'uguaglianza ciò può essere letto come il seguente messaggio: **l'uguaglianza da sola non è risolvibile, ma assume un ruolo di equilibrio dinamico solo se è resa operativa attraverso l'azione del porre**, cioè attraverso **l'atto del libero arbitrio**. Ciò ritrova un suo duale nella frase: la fede da sola non risolve, ma diviene salvifica solo con l'intervento dell'atto di servizio legato al libero arbitrio. Ricordando inoltre che i due membri dell'equazione si presentano in genere strutturalmente diversi, il segno di uguaglianza crea il **miracolo** di accettare la loro uguaglianza come atto di fede riconoscendo nell'equazione stessa dei valori che la trascendono. Più esplicitamente è come se il libero arbitrio imponendo **l'uguaglianza** sollecita **la fede** che permette il realizzarsi dell'accettazione di un'uguaglianza non presente strutturalmente, cioè tramite libero arbitrio la vista fisica si potenzia riuscendo a intravedere una verità superiore che **esprime l'oltre**, assumendo così quello che Agazzi chiama **intuizione intellettuale** cioè un **vedere** distinto da quello fisico, (*un vedere con l'occhio dell'anima*, direbbe Platone), ma ad esso analogo come facoltà **originaria** (quindi non riducibile ad altro) e **intuitiva** cioè capace di cogliere il suo oggetto **nelle cose stesse**, senza bisogno di presupporre qualcos'altro (Tratto da *Forme dell'epistemologia contemporanea* - Paolo Musso - Urbaniana University Press). In tal modo tale uguaglianza assume l'aspetto **eidetico**, cioè che concerne uno specifico tipo di **immagini caratterizzate da particolare vivezza e aspetto di realtà**. E' proprio in questa realtà che trova piena giustificazione l'accettazione di un'uguaglianza più profonda. Riprendendo l'unità didattica affrontiamo quella fase operativa che va sotto il nome di risoluzione dell'equazione. Trascurando i passaggi tecnici con i quali si esplicita tale risoluzione ci soffermiamo sul seguente aspetto: **risolvere l'equazione equivale a determinare quel valore che sostituito all'incognita nell'aspetto iniziale dell'equazione, rende l'equazione una identità cioè un'uguaglianza sempre vera**. Sotto il profilo didattico l'equazione può essere possibile determinata se la soluzione è unica, possibile indeterminata se esistono infinite soluzioni: in tal caso l'equazione iniziale è già un'identità o tautologia, impossibile se non esiste soluzione e in tal caso l'equazione è detta una contraddizione.

Seconda Riflessione: la dimensione risolutiva è resa possibile attraverso un **dinamismo** all'interno dell'equazione stessa: cambi di segni, trasporto da un membro all'altro, semplificazioni. . . . Tale dinamismo avviene in una dimensione priva di **spazio e tempi fisici**. Si può parlare di un **super dinamismo**. Tornando alla prima riflessione tale dinamismo è reso possibile dall'atto di fede e dal libero arbitrio che hanno reso possibile l'esistenza dell'equazione stessa. Infatti **tale movimento** è reso possibile **dall'opera dello Spirito Santo**, reso **presente dalla fede come atto**. La determinazione della soluzione può essere interpretata come il **premio** e quindi ancora ulteriore dono visto anche come ciò che è **emerso dal mistero contenuto nell'equazione passando così da una verità di fede**(l'incognita presente nell'equazione iniziale) **e la verità reale** (la soluzione ottenuta). Quindi dal concetto eidetico alla realtà di fatto. E' come se la fede sia riuscita a fare scendere dal cielo **un valore rendendolo terreno e quindi usabile dall'uomo**.

UNITA' DIDATTICA 4 - INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA ANALITICA

L'argomento che viene presentato esprime uno dei momenti cardine relativo alle basi prima concettuali poi operative di quello che oggi è chiamata realtà della scienza moderna e della sua tecnologia corrispondente. Possiamo indicare in **Renato Cartesio** il fautore di tale argomento in particolare per quella parte di geometria analitica detta appunto cartesiana. Seguendo la filosofia di Cartesio nei riguardi del **metodo** egli riesce a **vedere un collegamento tra il concetto di punto euclideo e i numeri reali**. Usando un linguaggio matematico attuale Cartesio stabilisce una corrispondenza biunivoca tra un punto euclideo e una n-pla ordinata di numeri reali, dove n esprime le dimensioni dello spazio al quale appartiene il punto p. Esempio: nello spazio a 1 dimensione (la retta) a ogni suo punto corrisponde un numero reale stabilito dopo aver considerato un punto origine sulla retta r e il suo verso di percorrenza (numeri positivi a destra dell'origine negativi alla sinistra). In tal modo la retta euclidea si è "**potenziata**" dal suo aspetto analitico divenendo la retta cartesiana. Il numero al quale corrisponde il punto p considerato è detto sua **ascissa o coordinata cartesiana**. Esempio p(2) indica il punto della retta che dista 2 unità di misura dall'origine dalla sua destra. Tale funzionalità ha fornito una **coincidenza concettuale** tra il punto p e il numero 2, cioè il numero 2 è il punto p e il punto p è il numero 2 in riferimento alla retta suddetta. Questo esempio può essere generalizzato nel caso del **piano euclideo**. In tal caso ad esso viene associato il **piano cartesiano** ottenuto generalmente dall'assumere **due rette perpendicolari (delle quali una orizzontale e l'altra verticale) e orientate opportunamente dove il loro punto comune è l'origine di entrambe le rette di riferimento**. Tali coppie di rette, il loro orientamento, l'origine comune e l'unità di misura uguale per entrambe è detto **riferimento cartesiano ortogonale**. In tal caso il piano viene suddiviso in quattro quadranti. Eccetto i punti appartenenti alle due rette di riferimento ogni punto del piano appartiene a solo uno e uno solo dei quattro quadranti. In tal caso ad ogni punto è associata una coppia ordinata di numeri reali chiamati rispettivamente ascissa e ordinata del punto che rappresentano le sue coordinate cartesiane nello spazio a due dimensioni (il piano). Analogamente a quanto visto nell'esempio precedente vi è coincidenza tra il punto p e le sue coordinate. Infatti nel caso p(2,3) il punto p coincide con la coppia ordinata 2,3 e la coppia ordinata 2,3 coincide con il punto p. L'esempio si può estendere allo spazio tridimensionale introducendo una terza retta ortogonale al piano formato dalle prime due e avente l'origine in comune detto **riferimento cartesiano tridimensionale**. In tal modo il punto p coincide con la terna **ascissa, ordinate e quota** come nel caso p(1,2,3). Quindi il punto coincide concettualmente con la terna (1,2,3) e la terna (1,2,3) coincide con il punto p. Non vi è nessuna remora concettuale che impedisca di generalizzare ulteriormente tale riferimento cartesiano associando a ogni punto p prima quattro numeri ordinati, cinque numeri. . . n numeri.

Prima Riflessione: iniziamo con il collocare come oggetto della riflessione la legge biunivoca che associa il punto alla n-pla ordinata di numeri reali. Restando comunque l'impossibilità di conoscere razionalmente l'**essenza** di tale legge non potendo accettarne quindi che solo l'aspetto formale (legge biunivoca), la riflessione prende spunto dalla seguente considerazione che confronta punto e numero: sia il punto che il numero hanno una loro

matrice esistenziale di tipo astratto:

1. sono asensoriali. Infatti entrambi non hanno peso, colore, non emettono suono, odore e sapore;
2. la mente riesce comunque ad averne una dimensione **eidetica** sia del punto che del numero, cioè ad ottenerne un'immagine di particolare **vivezza e aspetto di realtà**;
3. sia per il punto che per il numero la mente non trova difficoltà ad immaginarne una quantità illimitata. Questo associa il punto e il numero al concetto di infinito. Nulla cambia se al concetto di numero si sostituisce quello di n-pla ordinata.

Dalle tre considerazioni si evince una sorta di omogeneità esistenziale tra punto e n-pla di numeri. In tale omogeneità può trovare giustificazione un legame anch'esso astratto (la funzionalità biunivoca) fra queste due entità. Ancora quindi la **coincidenza** tra punto e n-pla è resa possibile dall'accostare sia nel punto che nella n-pla la stessa caratteristica di omogeneità al punto, tale da ottenere un assemblaggio di un nuovo ente (il punto cartesiano) che li identifica entrambi. E' come una moneta della quale una faccia è il punto e l'altra la n-pla di numeri. In sintesi il modello di questa prima riflessione conduce al mettere in risalto **una terza realtà** (il punto cartesiano) che nasce dalla constatazione di una caratteristica di omogeneità esistenziale relativa ai due enti. L'aspetto spirituale di tutto ciò può essere quello di accettare sia nel punto che nel numero, un **tocco di divino** che si esplicita come **dono** verso l'uomo in quanto è quest'ultimo a beneficiare della dimensione eidetica che li rende partecipi alla sua vita sia astratta che nella sua proiezione di concretezza e quindi anche pragmatica. Da ciò si evince che il **famoso legame** fra i due enti è un dono di natura divina. Il meccanismo che lo rende possibile è **l'accettazione per fede dei valori ultraterreni associati a quella omogeneità più volte richiamata**.

In queste ultime parole esprimenti uno stato di umiltà nei confronti del capire ultimo si ritrova quell'atteggiamento che Cartesio esprimeva come **una sorta di ascolto** riportato nel suo testo sul **metodo**.

Seconda Riflessione: un secondo momento dedicato alla riflessione assume come tema quello **dell'arricchimento** da parte dello spazio euclideo dovuto al contributo numerico analitico. Anche se nel modello euclideo era già presente un aspetto numerico e di posizione, ad esempio considerando un punto antecedente o successivo ad un altro oppure inerente alla misura di un ente geometrico, esso non coinvolgeva **il concetto di punto**. Il punto infatti può essere visto come **l'atomo geometrico**, come il numero **l'atomo analitico**. Il numero inserito nel contesto razionale tramite la struttura algebrica acquista la valenza di: **operare razionalmente e ordinare**. L'abbinamento punto n-pla ha permesso al punto euclideo di **brillare di nuova luce** possedendo ora la possibilità di essere coinvolto esso stesso in operazioni di calcolo e di ordinamento. Pensiamo in particolare al concetto di infinito geometrico. Come sarà esposto anche in seguito, mentre l'infinità euclidea è ospitata nella mente come qualcosa che è accettata dall'induzione, ma confusa a livello razionale-operativo. L'abbinamento numerico con il punto ha trasformato l'infinità

geometrica nell'infinità analitica assumendo di conseguenza la possibilità di ordinare e di operare rispettivamente con la vista della razionalità nell'infinito ora geometrico analitico. L'operatore cartesiano applicato alla geometria euclidea è da considerarsi esso stesso come quell'operatore che **vivifica rendendo gestibile l'ente geometrico come una sorta di telescopio o microscopio**. Ad esempio nella retta coesistono due infinità: quella **potenziale** (espressa dall'estensione infinita della retta) e quella **attuale** (espressa dal fatto che in un segmento ci sono infiniti punti). L'operatore cartesiano funge da **telescopio** per quanto riguarda l'**infinito potenziale** e da **microscopio** per quanto riguarda l'**infinito attuale**. Il modello cartesiano quindi permette di vedere meglio sia "**nel molto lontano**" che nell'**"estremamente vicino"** permettendo inoltre di eseguire delle **scelte** che si traducono in possibilità di calcolo. Richiamando come il punto cartesiano assume l'aspetto eidetico che gli consente di essere collocato anche nella dimensione della realtà sensoriale, da qui **l'iperbolico contributo fornito dal modello cartesiano** anche nei riguardi **dell'utilizzo dell'infinito in sede terrena e quindi utilizzabile nella dimensione terreno-tecnologica**. Richiamando che tale eccezionale contributo è utilizzato dall'uomo è conseguenza come il modello cartesiano abbia permesso all'essere umano di **vedere** con una nuova vista in modo sufficientemente nitido e come tale vista vi sia stata indispensabile per far ricadere il risultato delle operazioni analitiche conseguenti su quella sua parte di realtà che si manifesta anche nell'ambito della sua vista sensoriale-terrena. La maggior parte dei prodotti tecnologici legati all'elettronica sono infatti gestibili esclusivamente con il contributo geometrico-analitico coinvolgendo anche l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo. Da questo punto di vista questi oggetti hanno una dimensione anfibia in quanto in parte appartengono all'oceano dell'infinito e in parte si muovono sul terreno del finito. Scende "naturale" in una visione spirituale cristiana solo apparentemente ingenua di come i prodotti della tecnologia abbiano una duplice convivenza espressa dalla dimensione asensoriale dell'infinito con quella sensoriale del finito, cioè come **l'uomo è immagine di Dio così i prodotti della tecnologia sono ancora immagine di Dio che attraverso la Misericordia del suo unico Figlio ha concesso all'uomo di esserne partecipe**.

Restando all'interno dell'unità didattica volta all'introduzione della geometria analitica mettiamo in risalto come il modello cartesiano abbia permesso di eseguire una classificazione dettagliata sulla tipologia dei punti relativi ad esempio al piano. In tal caso il modello cartesiano è servito da disvelazione tipologica dei punti cosa assolutamente irrealizzabile restando a livello di punto euclideo. A questo proposito il piano cartesiano ospita quattro tipologie di punti:

1. **punti propri reali**: quelli che si trovano al finito e le cui coordinate sono entrambe espresse da numeri reali. Esempio $p(1,2)$;
2. **punti propri complessi**: sono i punti al finito dei quali almeno una coordinata è espressa dal numero complesso. Esempio $p(i,2i+1)$ oppure $p(3,i)$;
3. **punti impropri reali**: sono i punti all'infinito aventi coordinate reali. Va ricordato che per i punti all'infinito nel piano si usano le tre coordinate **pluckeriane** di cui la terza è uguale a 0. Esempio $p(1,2,0)$;

4. **punti impropri complessi:** sono i punti con almeno una coordinata pluckeriana espressa da numeri complessi. Esempio $p(1,i,0)$ oppure $p(1+i,i,0)$.

Questa classificazione permetterà in seguito di trovare ad esempio i punti impropri (all'infinito) di un luogo geometrico.

Terza Riflessione: terminiamo le riflessioni sulla dimensione cartesiana di uno spazio facendo notare come anche l'estensione della n -pla ai numeri complessi quindi non reali mette in risalto quella tipologia di punti che restando nell'ambito euclideo sarebbero sfuggiti dalla nostra consapevolezza. E' proprio riflettendo sull'acquisizione di un'ulteriore consapevolezza che appare ancora più chiaro l'aspetto del doppio dono e cioè:

1. il riconoscimento di tipologie diverse di punti;
2. la consapevolezza di ciò.

Questo ci fa comprendere come grande sia la misericordia dell'unica verità vera.

UNITA' DIDATTICA 5 - IL LUOGO CARTESIANO: LA RETTA E LA CIRCONFERENZA

Richiamando l'unità didattica relativa al concetto di **luogo** e a quella di **introduzione della geometria analitica**, ora intendiamo introdurre il concetto di **luogo cartesiano** per poi concentrarci in particolare su quello di **retta e circonferenza cartesiane**.

Luogo cartesiano: intendiamo limitare la trattazione a uno spazio a due dimensioni. Data la proprietà π relativa a punti di uno stesso spazio, il luogo cartesiano è espresso da un **legame analitico delle coordinate generiche $(x;y)$ di tutti e soli i punti di tale spazio che soddisfano alla proprietà π** . In generale il punto generico p potrà essere proprio o improprio, reale o complesso. In simboli abbiamo: $L \equiv \{\forall x, y \in Cp(x, y) \rightarrow \pi\}$; resta sottintesa l'introduzione degli assi cartesiani ortogonali con relativa unità di misura. Traducendo il luogo attraverso gli operatori ordinari, esso passa dalla sua dimensione di descrizione a quella analitica che in forma esplicita è del tipo $y=f(x)$ ed implicita $f(x,y)=0$. Matematicamente il luogo esprime quel **sottoinsieme** del piano cartesiano costituito dai punti le cui coordinate traducano utilizzando gli operatori, la proprietà π . In riferimento a ciò la scrittura analitica del luogo del tipo $y=f(x)$ o $f(x,y)=0$ sono dette anche rispettivamente equazioni cartesiane del luogo rispettivamente in forma esplicita e implicita. Questo modello permette di trasformare il concetto di appartenenza relativo al punto a quello di **soddisfare** relativo alle sue coordinate analitiche. Quindi come nel modello cartesiano il punto e la coppia di numeri coincidono così in riferimento al luogo il concetto di **appartenenza coincide con quello di soddisfare**. In scrittura analitica se $(p \in L) \equiv (f(x_0, y_0) \equiv 0)$ con x_0, y_0 coordinate di p . Scende che più luoghi L_1, L_2, \dots, L_n hanno ad esempio un punto $p(x_0, y_0)$ in comune; tali coordinate dovranno soddisfare

contemporaneamente a tutte le equazioni dei luoghi corrispondenti. Ciò risponde al carattere di intersezione logica che analiticamente esprime il soddisfacimento del sistema avente per equazioni quelle dei luoghi predetti. Quindi il modello cartesiano traduce il concetto di **punto di intersezione** (comune a tutti i luoghi) con quello di **soluzione** di un sistema algebrico. Una prima constatazione legata al concetto di luogo cartesiano è che vi è una **trasfigurazione** della forma geometrica a quella algebrica. Ciò avviene già con il numero in quanto un punto euclideo diviene nel piano una coppia di numeri. A maggior ragione la scrittura algebrica che indica l'equazione del luogo non ha nessun legame anche visivo con l'immagine geometrica da essa rappresentata. Un semplice esempio è espresso dal luogo $L \equiv \{\forall(x, y) | 0 \leq x \leq 2 \vee 0 \leq y \leq 6\}$ che rappresenta un rettangolo rispettivamente di lati 2 e 6. E' evidente che la scrittura analitica del luogo L non richiama minimamente l'immagine tradizionale del rettangolo geometrico. E' da notare però come la scrittura analitica abbia una **vitalità** maggiore rispetto alla figura geometrica. Infatti attraverso tale scrittura analitica si potrà collocare nel rettangolo con precisione un suo qualunque punto evidenziando così quella vitalità su richiamata. Ad esempio non sarebbe possibile con uno strumento semplicemente geometrico riconoscere che un punto p della diagonale del rettangolo ammette una proiezione sul lato di lunghezza 2 rispetto all'origine di una lunghezza pari a $\sqrt{3}$. Invece utilizzando il modello analitico si riconosce che tale punto è quello la cui ordinata è $3\sqrt{3}$. Quindi il punto a cui ci riferiamo ha come suo corrispondente cartesiano $p \equiv (3; 3\sqrt{3})$. Appare interessante notare come non sia possibile riportare fisicamente in modo corretto (infatti $\sqrt{3}$ è un numero irrazionale) tale punto come invece esso esista e abbia la collocazione su indicata. Da qui la straordinaria potenzialità del modello analitico su quello semplicemente geometrico. Quindi il modello analitico del luogo ci ha permesso di **vedere** (svelare) un punto che sarebbe rimasto **invisibile** (nascosto) nel rettangolo considerato solo nella sua forma geometrica euclidea.

Prima Riflessione: come già espresso nella prima riflessione relativa all'introduzione della geometria analitica è presente nel percorso logico della traduzione della proprietà nella sua equazione cartesiana corrispondente: $f(x,y)=0$ quella proprietà resa possibile dal carattere di omogeneità anch'esso ivi espresso. A livello spirituale ciò viene compreso come una estensione agli operatori introdotti di tale proprietà che permette quel **dinamismo** a sua volta generato da tale atto di fede. Quest'atto arricchisce in modo ancora maggiore rendendo **vivifica** la potenzialità operativa del luogo. Con ciò è richiamato in qualche modo il concetto pitagorico di luogo visto come sede del fuoco della vita. Il carattere vivifico prima richiamato è ciò che permette quell'**eccezionale lettura e manipolazione logica del luogo e dei punti che ne fanno parte**. E' come se il luogo euclideo venisse rigenerato da una pioggia di fede che rende possibile **quel germogliare della vita** presente in modo latente nei punti di tale luogo. Ancora una volta ciò richiama la dimensione di dono straordinario e gratuito offerto all'uomo, coincidendo tale fatto con l'ispirazione teologica cristiana.

La retta: come caso significativo di luogo consideriamo l'ente geometrico denominato retta e cerchiamo di evidenziare quelle sue caratteristiche che il modello cartesiano riesce a rendere **vivibili**. La proprietà π relativa alla retta può essere così espressa: **l'insieme di tutti e solo quei punti appartenenti a una stessa linea tali che per due distinti ne**

passi una e una sola. Si nota come dalla sola proprietà π non si riesca a cogliere un aspetto visivo sensoriale, cioè se nessuno avesse indicato sulla carta una linea retta, non avremmo potuto cogliere tale aspetto dalla sola proprietà π . Il luogo cartesiano della retta dovrà quindi rispondere all'esigenza del passaggio univoco del luogo per due punti distinti. Ricordando che il passaggio per un punto equivale alla sua reciproca appartenenza e analiticamente a soddisfarne l'equazione corrispondente del luogo, affinché il luogo sia unico deve contenere due soli parametri indipendenti che chiameremo m e q . Infatti se A e B rappresentano i due punti prescelti non coincidenti e non appartenenti alla stessa verticale, imponendo il passaggio della linea rispettivamente dal punto A e B si otterranno in corrispondenza due equazioni nelle due incognite m e q che a sua volta danno luogo ad un sistema possibile determinato nell'incognite m, q che rappresentano **una sola soluzione del sistema predetto.** Ciò equivale a dire che esiste solo **una linea che soddisfa tale condizione del passaggio per i due punti.** Con questo abbiamo dimostrato che il luogo che esprime la retta cartesiana nello spazio a due dimensioni deve contenere due parametri. Inoltre le coordinate x, y del punto generico della retta devono presentarsi con esponente uguale ad 1 cioè lineare. Infatti in caso contrario potremo avere la stessa equazione che esprime luoghi diversi, il che non è accettabile. Da tutto ciò scende che l'equazione del luogo cartesiano chiamato retta è espresso da una forma algebrica lineare (di primo grado) con due parametri m e q . Quindi nella forma esplicita avremo $y = mx + q$. Anche in questo caso la configurazione algebrica non richiama visivamente ciò che è il modello intuitivo della retta nella geometria euclidea. Si mantiene però la particolare **potenza** che tale scrittura presenta rispetto alla grafica euclidea. Infatti considerando i punti $A(0,0)$ e $B(1,4)$ l'equazione cartesiana corrispondente è $y=4x$. Soltanto tale scrittura ci permette di capire che il punto $p(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ appartiene alla retta r passante per A e B . Infatti con strumenti solo di tipo geometrico euclideo non sarebbe possibile **vedere**, quindi verificare la posizione del punto p le cui coordinate sono irrazionali. Come contro esempio attraverso la scrittura algebrica si può verificare come il punto $C(\sqrt{2}, 3.9\sqrt{2})$ non appartenga alla retta r . Infatti tali coordinate non soddisfano la sua equazione cioè $3.9\sqrt{2}$ è diverso da $4\sqrt{2}$. Mentre ciò è facilmente verificabile, essendo i punti p e C estremamente vicini è quasi impossibile accertarsi solo per via geometrica la non appartenenza di C a r . Un'interpretazione esotica dell'appartenenza del punto alla retta è la seguente. L'equazione della retta è come l'indirizzo civico per gli abitanti di uno stesso edificio, dove gli abitanti corrispondono ai punti della stessa retta. Quindi come l'indirizzo civico seleziona solo gli abitanti corrispondenti all'edificio così l'equazione della retta riconosce selezionandoli solo i punti che gli appartengono. Quindi l'equazione della retta vista come luogo è una sorta di **richiamo** di una natura **logo-ecologica** paragonabile a quella dell'anatra che chiama i propri pulcini nello stagno.

Prima Riflessione: scegliendo quanto ora detto come oggetto di una prima riflessione si ha:

1. la proprietà π arricchita dalla valenza analitica mette in atto un procedimento logico razionale che ci porta alla configurazione formale analitica della retta. Ancora una volta l'accettazione di una coincidenza tra realtà geometrica e analitica dà luogo a

un riconoscere un atto di fede che instaura attraverso lo spirito quel movimento che attraverso la logica produce la scrittura dell'equazione cartesiana della retta. Tale atto di fede è come una luce che evidenzia l'oggetto retta nella sua massima potenzialità;

2. l'equazione della retta è un dono doppiamente universale in quanto può essere usata da tutti e può ospitare in sé qualsiasi tipo di punto (proprio e improprio, reale o complesso) tale che le sue coordinate soddisfano l'equazione;
3. la stessa retta è un messaggio che può essere così letto: **essa esprime il suo essere nel piano cartesiano attraverso la sua legge. Tale legge richiama quelle due infinità di punti che attraverso le loro coordinate si collocano in essa.** Nel messaggio è contenuta una doppia valenza: **la retta che crea i punti secondo la propria legge e la retta che richiama e ospita infiniti punti del piano.** Il primo caso richiama il modello di Dio (la retta) che secondo la sua volontà (la legge) crea tutti gli esseri (i punti). Nel secondo caso tutti gli esseri che sono immagini della legge di Dio ritrovano in esso la loro vera appartenenza.

Ritornando alla fase esplicativa dell'unità didattica richiamiamo che l'equazione esplicita della retta r è $y=mx+q$. A parità di valori x,y rimangono legati nell'equazione in due parametri m,q . Ad essi possiamo assegnare rispettivamente una infinità rappresentata dai numeri reali. Quindi **totale** possiamo ottenere due infinità di rette nello stesso piano. In particolare assegnando un valore alla m e facendo variare in infiniti modi la q otteniamo infinite rette parallele che costituiscono un fascio improprio (F.I.). Il valore m è detto la pendenza o direzione comune a tutte le rette del fascio. Analogamente assegnando un valore a q e assegnando a m infiniti valori otteniamo le rette appartenenti a un unico punto Q , detto suo centro, di coordinate $0,q$ detto fascio proprio (F.P.). Come esempio $y=2x+q$ rappresenta un F.I. di pendenza o direzione 2, mentre $y=mx+2$ rappresenta il F.P. di centro $q(0,2)$.

Seconda Riflessione: possiamo rimarcare quanto segue:

1. come la dimensione analitica abbia permesso di **contare le rette del piano** cioè due infinità;
2. comprendere il significato geometrico dei coefficienti m e q . Infatti mentre m indica una stessa direzione, q indica uno stesso centro. Il che significa che nella doppia infinità vi è comunque un rispettivo riferimento. Teologicamente ciò può essere interpretato come unico riferimento in **Dio Padre** comunque presente nella realtà (il piano).

Proseguendo nell'unità didattica relativa alla retta mettiamo in risalto l'importanza analitica della sua equazione in quanto è possibile "collocare" il punto all'infinito della retta

stessa. Tornando al riferimento pluckeriano la retta all'infinito è espressa dalla terza coordinata uguale a zero cioè $x_3 = 0$. La relazione tra le coordinate cartesiane x, y non omogenee e quelle pluckeriane è: $x = \frac{x_1}{x_3}$ e $y = \frac{x_2}{x_3}$. Sostituendo questa trasformazione nella retta $r: y=mx+q$, e dopo aver eseguito il m.c.m. l'equazione della retta r in coordinate omogenee è: $V(x_2 = mx_1 + mx_3)$. Quindi il punto all'infinito di tale retta detto anche **punto improprio** si ottiene mettendo a sistema l'equazione omogenea della retta con la retta all'infinito $x_3 = 0$. Si ottiene: $x_2 = mx_1$ che ha per soluzione $x_1 = 1, x_2 = m$ e $x_3 = 0$. Quindi il punto all'infinito di una retta è $p_\infty(1, m, 0)$. La grande importanza della dimensione analitica della retta è espressa dall'aver potuto **individuare** in modo univoco il punto all'infinito che nella sua dimensione euclidea restava collocato in una dimensione confusa. Un altro importante risultato è lo stretto legame tra il punto all'infinito e il coefficiente angolare m o direzione della retta, in modo tale che vi è **sinonimia** tra punto all'infinito e direzione della retta. **Quindi tutte le rette aventi la stessa direzione (parallele) hanno in comune lo stesso punto all'infinito.** Esempio le rette del fascio improprio $y=3x+q$ hanno tutte la stessa direzione $m=3$, il che equivale ad affermare che hanno in comune (si incontrano) lo stesso punto $p_\infty(1, 3, 0)$. Un'ulteriore considerazione ci permette di comprendere come sulla retta all'infinito (impropria) $x_3=0$ esistano infiniti punti del tipo $(1, m, 0)$ ognuno dei quali è il punto di incontro di rette rispettivamente parallele. Esempio i fasci $f_1 : y = 2x + q$ e $f_2 : y = -5x + k$ hanno rispettivamente i punti impropri $A_\infty(1, 2, 0)$ e $B_\infty(1, -5, 0)$. Un altro straordinario risultato che scende considerando il punto improprio di rette parallele è quello di **far emergere una nuova convergenza (il punto improprio in comune), che non sarebbe stata nemmeno immaginabile se la retta avesse mantenuto la sua sola dimensione euclidea.** Infatti le coordinate pluckeriane hanno permesso **una visione che non ha nulla a che vedere con l'apparato ottico sensoriale, ma invece lo potenzia in modo iperbolico permettendo di percepire l'oltre.** Si tenga presente che i punti impropri sono utilizzati anche in tecnologia e che quindi hanno **una ricaduta** sulla strumentazione **terrena**. Un'altra consapevolezza che nasce dalla concezione analitica è quella di poter percepire il concetto di pendenza. Infatti se non intervenisse il punto all'infinito, la pendenza sarebbe espressa con una direzione, quindi richiamando un concetto generico, oppure come rapporto e quindi invisibile concettualmente. Ora invece con il punto all'infinito tale pendenza acquista una dimensione **visibile**.

Al fine di evincere un'ulteriore e mirabile conseguenza a portata del modello analitico della retta, ricordiamo la differenza tra **direzione** e **verso**. Come si è detto la direzione è il punto all'infinito della retta, il verso rappresenta il modo con il quale la retta è percorsa, ad esempio da destra o da sinistra dirigendosi quindi rispettivamente verso il $+\infty$ e il $-\infty$. In tal caso i segni $+$ e $-$ indicano il verso di percorrenza. Già intuitivamente si giunge a concepire l'infinito neutro in quanto esso esprime **l'entità impropria priva di segno**. Si deve al punto improprio della retta $p_\infty(1, m, 0)$ la **traduzione** analitica di tale infinito. Quindi una retta **converge** al suo punto all'infinito indipendentemente dal verso di percorrenza. Essa è quindi una curva che si chiude nel suo punto improprio $p_\infty(1, m, 0)$. In un certo qual modo può essere vista **come la circonferenza degenera di raggio ∞ e conseguentemente di centro improprio.**

Terza Riflessione: proseguendo nelle tappe riflessive relative allo sviluppo dell'unità di-

dattica che ha per oggetto la retta, sempre più appare **l'ampliamento** dell'importanza dell'aver associato al concetto euclideo di retta quello cartesiano. Si ricorda ancora come Cartesio sia pervenuto alla formulazione della geometria analitica **ascoltando** con umiltà la semplicità dei concetti che mano mano si venivano a formare nella sua mente. Richiamando quindi **tale metodo** si riconosce la sua eccezionale potenza che ha **illuminato in modo assolutamente imprevedibile l'ente chiamato retta**. Si sottolinea come la retta attraverso il suo punto improprio ha **fatto scoprire l'infinito geometrico**. E' come se **il dono della dimensione analitica contenuto nella retta abbia alzato il velo del mistero presente nell'infinito**. In tal modo ha assolto a due compiti eccezionali:

1. aver dimostrato l'esistenza dell'infinito geometrico;
2. aver reso determinato e calcolabile tale entità attraverso la struttura analitica dei punti impropri.

Concludiamo la riflessione ricordando ancora che il metodo cartesiano si è basato su **un atto di fede che ha permesso di sorvolare sulla ricerca dei motivi primi che generano il pensiero esprimendo quindi un atto di umiltà**. Ricordiamo ancora che in tal modo Cartesio ha permesso al pensiero greco di accedere alla concezione umanistica e rinascimentale che tanta importanza ha avuto in una reale rivoluzione scientifica della quale, sotto certi aspetti, siamo i beneficiari.

L'ultimo argomento scelto in relazione al tema della retta è **l'intersezione tra due di esse**. Per quanto esposto nella parte precedente, due rette hanno comunque un punto in comune e cioè: se non hanno la stessa direzione le rette si dicano secanti e il punto comune è proprio cioè al finito, se hanno la stessa direzione e non coincidono hanno il punto all'infinito in comune e si dicono parallele. Nel caso siano secanti il loro punto comune si ottiene imponendo che i due luoghi esprimenti le due rette abbiano una stessa proprietà espressa dal punto comune. Analiticamente ciò corrisponde a risolvere un sistema di primo grado di due equazioni di due incognite. Ad esempio le rette $r: y=2x$ e $s: y=-x+6$ formano un sistema algebrico la cui soluzione è la coppia $x=2, y=4$ che esprime geometricamente il punto p di coordinate $(2,4)$. La considerazione importante risiede nell'aver tradotto in modo deterministico il punto p comune alle due rette. Infatti il solo modello euclideo avrebbe risolto il solo quesito quantitativo: *le due rette r e s hanno un punto in comune?* Tracciando le due rette avremo verificato visivamente l'esistenza di tale punto, ma sarebbe mancata la sua lettura e quindi **collocazione analitica**. Quindi l'aspetto cartesiano ha permesso di **individuare in modo preciso la parte comune a due infinità**. Non si può trascurare la **eccezionalità** di tale risultato.

Quarta Riflessione: quest'ultima riflessione vuole mettere in risalto come l'atto di fede cartesiano abbia permesso ancora una volta di **leggere** il punto comune a due rette attraverso **il dono** della analiticità. Ciò può essere generalizzato affermando che l'atto di fede che apparentemente esprime una realtà fuori dalla logica, contrariamente è proprio

quello che conduce ad una possibilità in questo caso logico razionale della comprensione del fatto sottoposto a tale atto di fede.

La circonferenza

La circonferenza è il nome che viene assegnato al luogo geometrico avente la seguente proprietà: è costituito da tutti e solo quei punti che sono equidistanti da un punto fisso detto centro e tale equidistanza è detta raggio. Restando in ambito puramente euclideo il luogo fornisce un messaggio piuttosto scarno delle sue effettive caratteristiche. Come nei casi precedenti associando al modello euclideo quello analitico si mettono in risalto delle proprietà che sarebbero nascoste perdendo così informazioni sia formali che operative. Poniamo quindi la circonferenza nel piano cartesiano riferita agli assi x, y con origine O . Detto $p(x_0, y_0)$ il centro della circonferenza e r il suo raggio, applicando il teorema di Pitagora e imponendo la distanza costante tra il centro e il punto p si ottiene l'equazione cartesiana $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Esempio se il centro è il punto $(1, 2)$ e il raggio è uguale a 4 sostituendo si ha la seguente equazione della circonferenza: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Svolgendo i calcoli si ottiene la forma canonica della circonferenza: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$. Generalizzando l'equazione della circonferenza nel piano cartesiano diviene: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Da essa si ottengono le coordinate del centro: $p(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$, mentre il raggio è uguale $\sqrt{(\frac{-a}{2})^2 + (\frac{-b}{2})^2 - c}$. Esempio la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ è una circonferenza con centro $(2, 4)$ e raggio 5. Se consideriamo anche il caso di circonferenza con raggio uguale a 0 esse prendono il nome di circonferenze degeneri. Ad esempio la circonferenza con $r=0$ e centro $(0, 0)$ ha l'equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 0$. Intendiamo ora mettere in risalto alcune di quelle caratteristiche che emergono solo utilizzando l'aspetto analitico della circonferenza:

1. tutte le circonferenze hanno in comune due punti all'infinito immaginari-complessi detti punti ciclici del piano: $C_1(1+i, 0)$ e $C_2(1-i, 0)$. Considerando l'aspetto euclideo della circonferenza, essa si presenta chiusa e quindi non è comprensibile che essa passi per due punti all'infinito C_1 e C_2 . Per dimostrare quanto affermato usiamo le coordinate pluckeriane, trasformando così l'equazione della circonferenza in forma omogenea: $x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_3 + bx_2x_3 + cx_3^2 = 0$. Sezionando questa circonferenza con la retta all'infinito $x_3 = 0$ troviamo il luogo dei punti all'infinito della circonferenza e cioè: $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Questa equazione è soddisfatta dalla coppia $(1, \pm i)$. Si ricorda infatti che $(\pm i)^2 = -1$. Quindi **il luogo dei punti comuni alla circonferenza e alla retta all'infinito sono i punti $C_1(1, i, 0)$ e $C_2(1, -i, 0)$ che abbiamo già chiamato punti ciclici;**
2. due circonferenze non coincidenti hanno in ogni caso quattro punti in comune. Infatti cercando tali punti dobbiamo impostare il sistema costituito dalle due circonferenze. Essendo ognuna di esse di secondo grado il sistema risulterà algebrico di quarto grado. Esso ammette quindi quattro soluzioni. Due di esse sono i punti ciclici C_1 e C_2 prima introdotti mentre gli altri due punti saranno: reali e distinti se le circonferenze sono secanti; complessi coniugati se le circonferenze sono disgiunte; reali e coincidenti se le circonferenze sono tangenti;

3. la circonferenza degenerare con raggio uguale a 0 dal punto di vista euclideo si riduce a un punto, mentre con l'acquisizione della parte analitica si trasforma in due particolari rette complesse dette **isotrope**. Tali rette ospitano una particolare proprietà: **essere perpendicolari a sé stesse**. Infatti due rette sono perpendicolari se i loro coefficienti angolari risultano **antireciproci** cioè $m_1 = -(\frac{1}{m_2})$. Nel caso delle rette isotrope si ha che $m_1 = i; m_2 = -\frac{1}{i} = i$ quindi la retta $y=ix$ risulta perpendicolare a sé stessa. Ciò vale anche per la retta $y=-ix$. Anche tale proprietà si può riconoscere **solo attraverso il contributo della geometria analitica**. La circonferenza degenerare in equazione cartesiana è $x^2 + y^2 = 0$ che può essere scomposta nel campo complesso come somma di quantità positive nella forma $(ix+y)=0 -ix+y=0$. Infatti $(ix+y)(-ix+y)$ è uguale a $-i^2x^2 + y^2 = x^2 + y^2$. Per il principio di annullamento del prodotto scende che la precedente scomposizione si spezza nelle due rette: **$y=ix$ e $y=-ix$** che rappresentano appunto rette isotrope.

Prima Riflessione: è sufficiente rileggere quanto affermato in precedenza per comprendere lo straordinario apporto dell'analitica nei confronti dell'immagine puramente euclidea della circonferenza. Infatti disegnando tale luogo con un compasso e osservandolo non potremo mai immaginare che esso si estende all'infinito e in due punti particolari C_1 e C_2 tanto meno che un punto disegnato su un piano (rappresentante una circonferenza a raggio 0) esprima invece una coppia di rette le quali come abbiamo visto mettano in risalto quella proprietà dell'**autoperpendicolarità** assolutamente invisibile anche all'immaginario più astratto. Dello stesso tenore e nei riguardi dell'**apporto meraviglioso** del quale si accennava all'inizio della riflessione è quello di due circonferenze disegnate nello stesso piano secanti nei punti A e B. La vista fisiologica riduce l'intersezione a tali punti mentre non ha nessuna efficacia nei confronti degli altri due C_1 e C_2 sia perché sono collegati all'infinito e sia perché hanno coordinate complesse. Tale fenomeno assume la sua massima efficacia nel caso delle due circonferenze disgiunte. L'occhio **umano** non coglie nessun punto comune mentre invece l'**occhio dello spirito** educato dall'anima riesce a vederne comunque quattro. Quanto esposto resta una prova tangibile di come l'**atto di fede cartesiano** abbia svelato quei segreti che nel modello euclideo rimanevano nascosti. Da qui ancora una volta la fede può essere interpretata come una **potente luce che illumina sia "oggetti lontanissimi" che di natura sensorialmente non immaginabile**. Ancora una volta ciò esprime la dimensione di dono gratuito frutto della misericordia del Salvatore. Ricordando inoltre che tali caratteristiche analitiche vengono anche utilizzate nelle applicazioni tecnologiche, quindi in **meccanismi** la cui efficacia è tangibile anche sensorialmente, tutto ciò può essere interpretato come un forte messaggio che sinteticamente è così espresso: ciò che non è verificabile dal punto di vista sensoriale, esiste in una dimensione più ampia, **segue delle regole razionali ben precise apportando un contributo anche nella dimensione pragmatica**. È interessante notare come tali enti asensoriali possono essere resi evidenti attraverso meccanismi astratti (in questo caso razionali) a grandezze delle quali si può percepire l'aspetto sensoriale anche se parziale (la dimensione euclidea della circonferenza). È come se la dimensione sensibile esprimesse quelle radici che penetrando nel terreno metafisico permettono alla pianta di alimentarsi della sostanza spirituale in essa presente. La pianta quindi cresce e ramifica evidenziando

quelle dimensioni asensoriali il cui manifestarsi è reso possibile dal richiamato alimento dello spirito che però è assimilato e metabolizzato grazie all'atto di fede.

Asse radicale

Date due circonferenze $\alpha\beta$ complanari e non concentriche si dice loro **asse radicale** la retta che passa per i punti comuni alle due circonferenze. Operativamente tale retta si ottiene sottraendo le equazioni delle due circonferenze. Quindi indicando l'asse con r simbolicamente si ha $\alpha - \beta = r$. Sensorialmente ci si aspetta che tale retta sia presente solo nel caso in cui α e β siano secanti. In realtà l'asse r è sempre presente anche se le due circonferenze sono disgiunte. Questo per due motivi: la retta r rappresenta la **circonferenza del fascio costituito dalle circonferenze α, β e raggio infinito**, quindi passante anch'essa per i punti ciclici C_1 e C_2 dai quali, come espresso nel punto precedente, passano tutte le circonferenze del piano. Il modello dell'asse radicale è di particolare efficacia per cogliere simultaneamente molti aspetti resi **visibili** e quindi oggetto di calcolo dall'apporto analitico e cioè:

1. l'asse radicale interpretabile come **circonferenza degenera di raggio infinito**;
2. l'esistenza dei punti ciclici C_1 e C_2 posti all'infinito e di coordinate complesse;
3. l'utilizzo dell'asse radicale per determinare comunque gli altri due punti comuni alle circonferenze diverse dai punti ciclici.

Prima Riflessione: in questo caso al riflessione sottolinea la particolare **ricchezza** dei doni che permettono la gestione di una realtà geometrica particolarmente complessa. Si evince quindi come il dono permetta sia di svelare grandezze **nascoste**, ma anche di gestirne l'operatività.

UNITA' DIDATTICA 6 - IL LIMITE

Questa unità didattica si prefigge di introdurre il concetto di **limite** per una funzione ad una variabile reale secondo un profilo più descrittivo che analitico non trascurando però il rigore necessario. Diciamo subito che il **concetto di limite** rappresenta il **momento** di svolta certamente rivoluzionaria presente nel pensiero speculativo. Esso trova la sua nascita alla fine del diciassettesimo secolo attraverso i due personaggi Newton e Leibniz, anche se altri avevano avuto delle intuizioni piuttosto simili, ma non altrettanto efficaci. Si richiama il significato etimologico del termine limite derivante dal latino *limes, -itis* proveniente forse da *limus* che si traduce in obliquo e cioè linea di confine naturale, non retta come quelle artificiali. Per quello che verrà detto in seguito è utile accogliere l'aggancio tra il concetto di naturalità del limite in contrapposizione a quello di linearità quindi semplificazione artificiosa e riduttiva. E' nel carattere di naturalità che risiede quella **stravaganza logica che è l'elemento fondamentale del concetto di limite** che andiamo a presentare. Mettiamo subito in luce quel **qualcosa** che ha reso il concetto di limite **un fatto rivoluzionario**. Ciò consiste **nell'aver scambiato nella scrittura matematica il concetto di assumere con quello di tendere**. Facendo degli esempi si ha:

1. assegnando alla variabile x il valore 3 si intende che la x **assume il valore 3**. Ciò può essere anche interpretato come fatto che la x si va a collocare nella posizione assunta dal numero 3 assumendone quindi l'identità. Il concetto di tendere della x al numero 3 indica come la x **non assume il valore 3, ma valori sempre più prossimi al numero 3 sia per difetto che per eccesso**. Tornando al modello precedente la x non va a collocarsi nella posizione del numero 3, ma gli si avvicina indefinitamente sia da sinistra che da destra. Un altro modo per esprimere questo fatto è affermare che il valore della x si differenzia **per una quantità ϵ positiva e piccola a piacere dal numero 3**. Ciò si può scrivere analiticamente $3 - \epsilon < x < 3 + \epsilon$ dove x appartiene ai numeri reali. **Il fatto rivoluzionario nel contesto del pensiero matematico è aver introdotto la quantità ϵ non definita numericamente, ma solo qualitativamente (piccola a piacere)**. Generalizzando l'esempio, il numero 3 è detto **punto di accumulazione c dell'operazione tendere a**. La scrittura $c - \epsilon < x < c + \epsilon$ è detta **intorno di c (I_c)**. L'operazione di tendere a c si esprime con $x \rightarrow c$ e si può enunciare nel seguente modo: *il tendere di x a c rappresenta l'assunzione da parte della x di tutti i valori appartenenti all'intorno di c escludendo tale valore $x \neq c$* . Da questo primo esempio si traggono come già accennato le seguenti considerazioni forti: **l'aver concepito il punto di accumulazione come una sorta di attrattore nei riguardi della x comunque irraggiungibile; aver concepito la quantità ϵ di natura semi numerica**. Infatti di essa è stata fornita solo la positività ma non il valore determinato. **Alla quantità ϵ è stato assegnato un valore indeterminato piccolo a piacere**. Questa caratteristica legata all'arbitrio del pensiero è un elemento di **assoluta novità** nel calcolo matematico e sottolinea una **sorta di collaborazione** tra il pensiero e l'algoritmo. E' come se l'algoritmo coincidesse con il pensiero attivo presente nell'operazione di calcolo. Le considerazioni precedenti possono essere unificate nella seguente considerazione: **nell'intorno di c si crea un alone di raggio ϵ nel quale la x può penetrare perdendo però qualsiasi forma di razionalità, come se uno spirito espresso dal punto di accumulazione la attirasse attraverso un atto di fede**. Può essere utile ricordare come Newton indicasse con **ox** il piccolo incremento relativo ad x , mentre Leibniz in modo assolutamente autonomo lo indicasse con **dx**. Le quantità ox venivano definite **evanescenti** nel senso che in alcuni casi come vedremo è come se vi fosse una sorta di loro "sparizione". Risulta ulteriormente indicativo ricordare che ogni operazione ha un suo risultato. Ci chiediamo nel caso del **tendere** qual è il risultato corrispondente? Come si può evincere da quanto detto in precedenza esso non è un valore determinante ma è uno stato di **attrazione logica**. Anche da qui si evidenzia ancora quell'aspetto rivoluzionario accennato all'inizio;
2. per far ben comprendere **la straordinaria efficacia dell'operazione di limite** consideriamo quanto segue: sia $y = \frac{x}{x}$ una funzione reale. Se applichiamo il concetto di assumere ponendo $x=0$, otteniamo $y(0) = \frac{0}{0}$ che non ha significato matematico. Se invece applichiamo **il concetto di tendere** in tal caso al punto di accumulazione $c=0$, si ottiene che la x non assume il valore 0, ma un qualsiasi valore compreso tra $-\epsilon < x < \epsilon$. Chiamiamo uno di tali valori k . In tal caso la funzione diviene $\frac{k}{k}$. Essendo $k \neq 0$ avremo che la funzione *tende* al numero 1. In scrittura: limite per x che tende a zero della funzione $\frac{x}{x}$ è uguale a 1. In simboli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$. La prima

considerazione importante è che mentre la funzione $\frac{x}{x}$ non esiste per $x=0$ esiste ed è uguale a 1 il suo limite per $x \rightarrow 0$. L'operatore che porta il calcolo del limite è chiamato **passaggio a limite**. Possiamo quindi affermare che il limite per $x \rightarrow 0$ di $\frac{x}{x}$ è uguale a 1 oppure che 1 è il risultato del passaggio a limite per x che tende zero di $\frac{x}{x}$. Un'ulteriore considerazione è quella di far comprendere l'eccezionale ruolo espresso dal punto di accumulazione il quale è riuscito attraverso la sua forza logica a rendere determinato il risultato di un calcolo **affidato** ad una x che ha perso la sua **dote di razionalità come sottolineato nell'aspetto precedente**.

E' molto significativo concentrare l'attenzione sul fatto che entrambi gli esempi portati possono essere generalizzati estendendo il concetto di punto di accumulazione al valore infinito come pure quello di limite. Si sottolinea come il caso in cui il punto di accumulazione sia l'infinito sia possibile eseguire solo l'operazione di passaggio al limite in quanto non è possibile far assumere alla x il valore infinito. Questa nota ha il significato di far comprendere come il passaggio al limite oltre che a superare una difficoltà di calcolo ha permesso di eseguire in alcuni casi calcoli irrealizzabili senza il suo apporto. Volendo fornire del passaggio al limite un modello analiticamente corretto possiamo affermare: la funzione $f(x)$ ammette limite l (finito o infinito) per x che tende a c (finito o infinito) se per ogni x appartenente all'intorno di c vi è in corrispondenza il valore della funzione $f(x)$ appartenente a un intorno di l . Come vedremo nell'unità didattica relativa alla derivata il calcolo del limite trova importante applicazione nel campo della fisica applicata e quindi della tecnologia.

Prima Riflessione: appare assolutamente evidente come il concetto di limite sia inserito in un'ambientazione priva di riferimenti razionali in senso deterministico, ciò grazie a concetti come **piccolo a piacere, e tendere ma non assumere**. Ciò esprime una terminologia più filosofica che matematica in senso tradizionale, ma proprio tale modo di porsi ha permesso alla matematica, alla scienza e alla tecnologia una accelerazione straordinaria nei confronti della sua produzione in genere. Tutto ciò **non può far che riflettere ancora una volta sulla dimensione di dono espressa dal concetto di limite**. La sua prerogativa di dono è manifestata da quella potenzialità non deducibile da processi razionali, ma che si sviluppa solo attraverso **un'ispirazione di fede**. Nel suddetto dono è ospitato un forte segnale di verità vera. Infatti l'esecuzione del limite porta ad un fidarsi di quella operosità intrinseca nella matematica. Tutto ciò è anche un atteggiamento di **modestia e umiltà dell'uomo nei confronti di ciò che la sua logica naturale non è in grado di comprendere**. Il maggior dono è quindi **il risultato del limite che può essere visto come una sorta di premio che emergendo dalla irrazionalità logica assume dimensione razionale** e quindi utilizzabile sul pianeta Terra. E' ancora la fede quindi che illumina il percorso umano dando la possibilità all'uomo di far passi da gigante nella direzione del bene comune. E' importante il riconoscere in Newton e Leibniz gli autori del concetto di limite in quanto entrambi avevano una visione spirituale della matematica e della fisica. Newton nello "*Scolio generale*" incluso nella seconda edizione dei *Principia* del 1712 dichiara che *uno spirito sottilissimo che pervade i grossi corpi e che in essi si nasconde*. Tale spirito sottilissimo può essere interpretato nel caso del limite con ϵ piccolo a piacere. Si può cogliere

inoltre una analogia abbastanza evidente tra la gravitazione Newtoniana e il punto di accumulazione. Infatti entrambi usano una **forza invisibile** per attrarre; nel primo caso permettendo la vita sulla Terra e nel secondo la vita del limite e quindi di una matematica più evoluta.

Seconda Riflessione: non si può trascurare come contributo al concetto di limite dovuto alla geometria analitica cartesiana. Infatti senza il modello cartesiano quindi all'introduzione di **retta dei numeri reali** non potremmo fornire il concetto di intorno ordinato. Scende come l'opera dei tre grandi Cartesio, Newton e Leibniz esprima una sinergia che ha come fattore accomunante quello della fede cristiana grazie alla quale ci è consentito di **vedere e vivere l'oltre**.

Terza Riflessione: per la fondamentale importanza che assume il **passaggio al limite** sia a livello scientifico che come contributo al progresso in genere si ritiene opportuno promuovere un ulteriore e **significativa riflessione** che conduce a una dimensione **miracolistica** dell'operatore suddetto. Infatti anche se l'intero edificio matematico rappresenta comunque un **mistero** per la comprensione prima in quanto non risponde alla domanda *perché?*, esso rimane spesso come in **sottovoce** al punto tale che per gli spiriti meno sensibili pare che tale mistero taccia. Nel caso dell'operatore di limite, tale mistero, **urla** attraverso la straordinarietà, quindi soltanto coloro che hanno **grossi difetti di udito** sia naturali che causati dal volersi tappare le orecchie, non sono in grado di coglierlo. In termini più analitici tale comportamento miracolistico è espresso **dall'incomprensione razionale del come avvenga il meccanismo nella sua fase definitiva che conduce al calcolo del limite il cui risultato appare ed è corretto**. Risulta significativo il modello della **staffetta**: è come se l'impostazione dell'operazione di limite risponda a un passaggio di testimone fra corridori di una stessa corsa, mentre il risultato del limite corrisponde all'ultimo corridore il quale ha caratteristiche atletiche completamente diverse e superiori dai precedenti riuscendo infatti a tagliare la linea del traguardo (il limite) che solo lui può fare. Questo modello vuole sottolineare una compartecipazione tra uomo e Dio nel raggiungere il risultato espresso dal limite. Tutto questo rientra in una visione **finalistica ed eidetica** che ha come motivazione prima la volontà di Dio che attraverso l'aiuto dell'amore misericordioso rende partecipe l'uomo potenziandolo, del proprio cammino storico. In sintesi l'uomo imposta l'operazione di limite suggerita comunque da Dio mentre il risultato è Dio stesso che lo rende possibile seguendo il modello: se l'uomo si fida di Dio e ascolta i suoi suggerimenti Dio realizza la sua crescita. Riportiamo un brano dalla prima lettera ai Corinti di San Paolo 12,4-9: *Poiché c'è bensì diversità di doni, ma lo spirito è il medesimo; come c'è diversità di ministeri, ma il medesimo Signore; e diversità di operazioni, ma il medesimo Dio, che opera tutto in tutti. La manifestazione dello spirito è data a ciascuno per l'utilità comune. Infatti dallo Spirito ad uno è dato del linguaggio della sapienza; ad un altro il linguaggio della scienza, però secondo il medesimo spirito. Ancora dal 12,11: or, tutte queste cose le compie un solo e un medesimo spirito, distribuendole a ciascuno in particolare secondo vuole.* In questo passo evangelico risiede la comprensione come il dono del limite concesso ai soli Newton e Leibniz sia comunque dedicato al bene comune. Quindi il limite è un dono **ecumenico**.

UNITA' DIDATTICA 7 - LA DERIVATA

La presente unità didattica sceglie come soggetto l'operatore denominato derivata. La sua denominazione è congeniale al fatto che essa **derivi** (scende) dal concetto di limite che è stato introdotto nell'unità didattica 6. Storicamente la derivata viene scoperta sia da Newton che da Leibniz e facente parte a quello che oggi viene chiamato **calcolo differenziale**. I due matematici, che si è dimostrato in seguito abbiano lavorato in modo del tutto autonomo, giunsero al concetto di derivata attraverso strade differenti, ma equivalenti sotto il profilo concettuale. Anche il quesito che dette origine alla scoperta è differente e cioè per Newton la ricerca della **velocità istantanea** mentre per Leibniz la ricerca **dell'equazione della tangente ad una curva continua in un suo punto**. Inoltre parteciparono all'idea di limite anche altri pensatori tra i quali Pascal che introdusse il **triangolo di Pascal** ripreso poi da Newton per la formulazione del concetto di derivata. Un contributo notevole da un punto di vista formale è fondato da Lagrange. Concettualmente la derivata esprime il rapporto di due grandezze entrambe tendenti ad essere molto piccole. Volendo assegnare a questo operatore una forma più comprensibile consideriamo una funzione $y=f(x)$ continua in ogni suo punto. Indicato con h un incremento positivo della x si ha che la funzione passa dal valore $f(x)$ al valore $f(x+h)$. Si è così in presenza di due incrementi: $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ detto incremento della funzione e incremento h della variabile. Il loro rapporto $\rho = \frac{\Delta y}{h}$ è detto **rapporto incrementale** della funzione nel punto x . Graficamente si consideri la curva γ grafico della $f(x)$ e i suoi punti A di ascissa x e B di ascissa $x+h$. Il rapporto incrementale ρ esprime la **pendenza** della corda AB che coincide con l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC (Triangolo di Pascal). In tale triangolo $AC=h$ e $BC=\Delta y$. Il rapporto incrementale, una volta fissato il valore x , è una funzione di h . La derivata nasce dal passaggio al limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale quando questo limite è finito. La derivata si indica con $f'(x)$. In formula: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = L_{finito}$. Si noti come sia il numeratore Δy che il denominatore h tendano entrambi a 0 giungendo alla forma di indecisione $\frac{0}{0}$ che però attraverso l'operazione di limite viene **risolta**. Esempio: sia $f(x) = x^2$, avremo: $\Delta y = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + h^2 + 2xh - x^2 = 2xh + h^2$ da cui $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$. Si dice anche che la funzione derivata della $y = x^2$ è la funzione $y'=2x$. Procedendo analogamente si trovano le funzioni derivate delle funzioni maggiormente utilizzate. Ritornando al richiamo storico Newton indica le variabili x e y ecc. come **fluenti** mentre le derivate come **fluitori**. Leibniz introduce il concetto di differenziale ponendo quindi $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ (notazione di Leibniz).

Da quanto esposto scende spontanea la seguente considerazione: la derivata è il rapporto di due quantità **evanescenti** nel senso che esse divengono sempre più piccole sino ad **apparentemente svanire** mentre invece esse si **realizzano** in un valore ben definito. Ciò si esprime matematicamente affermando che il passaggio al limite elimina la forma di indeterminazione fornendo il valore finito della derivata. Anche se attualmente tutto ciò viene fatto rientrare nella logica degli infinitesimi, comunque rimane incomprensibile dal punto di vista deterministico passo passo il risultato di tale procedimento, fatto che era stato già considerato in relazione al concetto di limite.

Al fine di cogliere il significato anche applicativo della derivata consideriamo le sue due interpretazioni che l'hanno resa particolarmente importante nel campo scientifico:

1. **velocità istantanea:** in questo caso la variabile x esprime il tempo mentre la funzione è la legge oraria, quindi $x=t$ e $f(x)=s(t)$. Il rapporto incrementale indica la velocità media, infatti: $\rho = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ dove h esprime l'incremento di tempo. ρ coincide con la definizione di velocità media nell'intervallo di tempo h . Per velocità istantanea si intende la velocità all'istante t , cioè per h che tende a zero. Ciò corrisponde al concetto di derivata della funzione oraria. Quindi $v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h)}{h}$. Ad esempio se la legge oraria è $s = t^2$, la legge del moto, cioè esprime le velocità istantanee è: $s'(t)=2t$. Quindi se un punto dopo 5 secondi ha percorso 25 metri la sua velocità istantanea è di $2 \times 5 = 10 \text{ m/s}$ cioè il valore della derivata della funzione $s(t)$ corrispondente a 5 secondi. Considerazione: nel caso della velocità istantanea è di particolare interesse riflettere sul fatto che il tempo t venga considerato e gestito come una variabile numerica;
2. **tangente a una curva in un suo punto:** sia γ il grafico della funzione $y=f(x)$ e sia x l'ascissa di un suo punto. Tornando al triangolo di Pascal il rapporto incrementale indica la pendenza della corda sottesa dal punto A di ascissa x e il punto B di ascissa $x+h$. Ritenendo il punto A fisso sulla curva γ e facendo avvicinare quanto si vuole B ad A la corda diviene sempre più piccola e quando B coincide con A, $\Delta y = h = 0$ ottenendo la forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Applicando il passaggio al limite tale indecisione viene risolta fornendo **la pendenza** della retta tangente alla curva nel punto A. Quindi in tal caso la derivata esprime la pendenza della retta tangente in un dato punto della curva γ . Quindi se $p(x_0, y_0)$ è un punto della curva γ , l'equazione della retta tangente è: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. In particolare $f(x) = x^2$ e sia $p_0(3, 9)$ un suo punto. $f'(x)=2x$; $f'(3)=6$ questo significa che la pendenza della retta tangente alla curva $y = x^2$ nel suo punto $(3,9)$ è uguale a 6. La retta tangente sarà $y=6x-9$. Si accenna al fatto che l'operatore derivata occupa un ruolo da protagonista anche nello studio di funzione con risultati interessanti sia sotto il profilo puramente teorico che applicativo special modo nel campo finanziario. *Considerazione:* anche nel caso della retta tangente si deve sottolineare **l'eccezionale apporto** della derivata che risolve in modo corretto sia l'aspetto geometrico della corda AB che si trasforma nella retta tangente che il problema analitico passante dallo stato di indecisione relativo al triangolo di Pascal ad una pendenza **finita e corretta**. Richiamando la grande importanza applicativa della derivata in campo meccanico, geometrico e scientifico in genere si può evincere ancora una volta lo straordinario contributo del passaggio al limite nell'evoluzione del progresso dell'uomo.

Riflessione: la riflessione intende incentrarsi sul ruolo di eccezionale contributo portato dalla derivata in quasi tutti i campi della ricerca e dell'applicazione scientifica. La caratteristica della quale preme sottolineare la particolare valenza risiede nel constatare una **specifica attività logica** all'interno dell'operazione di derivata che permette di **aggirare**

L'ostacolo della indeterminazione sia nel campo geometrico che fisico. Si vuole ancora sottolineare l'importanza **dell'aver assegnato al tempo un carattere matematico**. Ciò avvalorava ancora di più quella dimensione mistica che pervade e penetra comunque il percorso scientifico. Si ricorda ancora che i personaggi che hanno contribuito al concetto di derivata Newton, Pascal, Leibniz erano comunque fortemente sorretti e guidati da una **solida fede**.

UNITA' DIDATTICA 8 - L'INTEGRALE

Insieme alla derivata, l'operatore denominato **integrale** esprime un **eccezionale e meraviglioso** tema della matematica riferita al diciottesimo secolo in special modo per l'opera di Torricelli, Cavalieri e Barrow. Mentre il primo è un collaboratore di Galilei, l'ultimo è l'insegnante di matematica di Newton. L'integrale esprime anche un altrettanto significativo e insostituibile apporto della matematica alla scienza e alla sua ricaduta tecnologica. La presente trattazione intende soffermarsi particolarmente sull'aspetto teorico aprendo a considerazioni di natura logico-metafisico. Seguirà inoltre una riflessione di tipo teologico.

La parola integrale ha come significato: *ciò che con le altre parti forma l'intero*. Riportando tale significato a livello matematico va subito detto che **le parti che formano l'intero sono rappresentate da entità differenziali** cioè da grandezze **piccole a piacere**. Tali parti nascono storicamente di natura geometrica. Infatti l'integrale nasce in prima istanza per risolvere problemi legati al calcolo di misure geometriche: area, volume, lunghezze. Per questo motivo le anzidette **entità differenziali** si specializzano in: dA, dV, dL che esprimono rispettivamente il differenziale d'area, di volume e di lunghezza. Ci limiteremo al caso del differenziale d'area. Intendendo di chiarire il significato del differenziale d'area dA , esso può essere inteso come l'area infinitesima (piccola a piacere) di un rettangolo avente per altezza l'ordinata della funzione e cioè $y=f(x)$ e per base il differenziale della x cioè dx (notazione di Leibniz già introdotta nell'unità didattica relativa alla derivata) che indichiamo con **rettangolo infinitesimo**. Da cui $dA=f(x)dx$ indicato con incremento di area finita. L'utilizzo della quantità dA è quello di sostituire l'area della figura finita avente per altezza la stessa funzione $f(x)$ ma per base l'incremento finito Δx quando $\Delta x \rightarrow 0$. Da cui: $dA = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)\Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta A$. Va detto inoltre che il rettangolo di area finita ΔA è un valore approssimato dell'area ΔT della figura espressa dal cosiddetto sotto trapezoide che rappresenta la parte di piano compresa tra la curva di equazione $y=f(x)$ limitata nell'intervallo Δx . Quindi $\Delta A \neq \Delta T$. L'eccezionalità del calcolo integrale risiede nel fatto che nel passaggio al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ l'area infinitesima dA va a coincidere con l'area del sotto trapezoide differenziale indicato con dT , cioè è come se l'infinitamente piccolo espresso dal dx **elimini totalmente** l'approssimazione del valore ΔA rispetto a ΔT cioè: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta A - \Delta T| = 0$. In termini tecnici si afferma che $\Delta A - \Delta T$ è un infinitesimo per $\Delta x \rightarrow 0$ e quindi rappresenta una quantità **evanescente** come già Newton definiva il passaggio al limite. Si parla di integrale **definito** della funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso $[a,b]$ il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ della sommatoria di tutti gli incrementi di area ΔA . Si scrive $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta A = \int_a^b dA$ che riprendendo la notazione di Leibniz diviene $\int_a^b f(x) dx$. Indicando con T l'area del trapezoide di estremi a e b cioè della figura limita-

ta dall'asse delle x , dalle rette $x=a$ e $x=b$ e dalla funzione $f(x)$ considerata non negativa, per quanto detto precedentemente: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta A = T$ ancora $\int_a^b dA = T$. Ciò significa che estendendo alla sommatoria degli incrementi finiti di area il passaggio al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ si ottiene esattamente il valore della misura del trapezoide. Anche in questo caso gli errori relativi ad ogni sotto intervallo Δx commessi sostituendo a ΔT il valore ΔA divengono evanescenti cioè tendono a zero. Raccogliendo possiamo scrivere per $f(x)$ non negativa che $\int_a^b f(x) dx = T$ dove il simbolo \int_a^b è detto integrale definito di primo estremo a e di secondo estremo b , mentre $f(x)$ è detta **funzione integranda**. Scende quindi che l'integrale definito di una funzione non negativa esprime l'area del trapezoide T sotteso dal grafico della funzione e la sua proiezione sull'asse x . Nel caso di funzioni con segno qualsiasi l'integrale esprime il valore **algebrico** tra le aree dei trapezoidi positivi e quelli negativi.

Considerazione: merita un'attenzione particolare il prendere atto del come l'area differenziale dA possa esprimere in modo corretto la misura di un'area ΔA . Ricordando che dA nasce come passaggio al limite di $\Delta x \rightarrow 0$ è inclusa in essa una logica di tipo induttivo che però non riesce in definitiva a **vedere** l'equivalenza tra le due aree infinitesima e finita, ma deve **demandare** tale comprensione a un processo logico non deterministico passo passo. In riferimento a ciò si richiama il modello della staffetta riportato nell'unità relativa al limite. Infatti se non fosse instaurato un atto di **fede** nei confronti del passaggio al limite sarebbe inaccettabile l'ammissione dell'azzeramento dell'errore commesso sostituendo a ΔT il ΔA , cosa che invece **avviene**. Un'altra considerazione è quella espressa dal fatto che la scelta della quantità $dA=f(x)dx$ richiama l'attenzione sulla parte **più piccola possibile** relativa all'area che però mantiene le sue caratteristiche geometriche legate alla funzione $f(x)$. Infatti benché dx sia una quantità piccola a piacere il rettangolo infinitesimo $f(x)dx$ tramite la $f(x)$ mantiene **comunque le caratteristiche metriche del sotto trapezoide finito** ΔT . Si può vedere quindi dA come una sorta di informazioni geometriche genetiche come è per la biologia il DNA. Quindi il $dA=f(x)dx$ **conserva** comunque nella sua infinita piccolezza le caratteristiche corrette della geometria della funzione. L'integrale esprime come una lettura estesa all'intervallo $[a,b]$ dell'area dA , ingrandendone le caratteristiche geometriche che però restano corrette nei confronti del calcolo dell'area. È sicuramente un processo che se anche accettato e fatto rientrare in una logica formale sfugge nella sua comprensione definitiva in quanto costretto a passare attraverso il concetto di infinito (dA infinitamente piccolo).

Riflessione: da quanto è stato espresso l'anima trova un suo alimento correndo verso ciò che l'attira meravigliandola, tramite ciò che la mente non comprende ma che comunque è stato fornito all'uomo come ulteriore e magnifico dono. In relazione al concetto di entità differenziale relativa al dA come al dV e al dL , vi è il richiamo al **Granello di senape** richiamato dal Vangelo di Matteo 13,21 che viene riportato: *“proposte loro un'altra parabola, dicendo: il regno dei cieli è simile a un chicco di senape, che un uomo prese e seminò nel suo campo; certamente è il più piccolo di tutti i semi, ma cresciuto che sia, è il maggiore dei legumi e diventa albero, tanto che gli uccelli del cielo vengano e si mettano a riparo fra i suoi rami”*. E' evidente il parallelismo con il concetto di integrale, infatti: il granello di senape è il $dA=f(x)dx$, l'uomo è l'insieme dei pensatori che hanno introdotto il concetto di integrale

e il suo campo è il momento storico nel quale si realizza. La crescita dell'albero della senape è espressa dalla risoluzione dell'integrale fornendo un valore corretto, mentre la frase "il maggiore dei legumi diventa albero" sta a significare l'importanza dell'integrale nella storia della matematica e della scienza. L'ultima frase "tanto che gli uccelli del cielo vengano e si mettano a riparo fra i suoi rami" esprime come l'uomo e la sua intelligenza illuminata dalla fede trovino nel calcolo integrale possibilità di sviluppo inteso anche come sicurezza.

La risoluzione dell'integrale

Anche se brevemente intendiamo fare un richiamo sulla dimensione operativa dell'integrale sia indefinito che definito. L'integrale indefinito corrisponde all'integrale definito esclusi gli estremi a e b e fornisce come risultato dell'operazione **la primitiva $G(x)$** della funzione integranda, cioè la funzione che derivata fornisce $f(x)$. Quindi: $\int f(x) dx = G(x) | G'(x) = f(x)$. Ad esempio riportiamo la formula di Cavalieri-Torricelli nel caso di $f(x) = x^n$ per $n \neq -1$ cioè $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ad esempio $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Infatti $(\frac{x^4}{4})' = x^3$. Per correttezza si dovrà aggiungere alla primitiva una costante arbitraria in quanto nell'operazione di derivazione essa non è più presente: quindi $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

Calcolo dell'integrale definito

Quanto esposto nella descrizione teorica dell'integrale trova una esplicitazione di calcolo grazie ad un importante teorema che ha avuto come autori Torricelli e Barrow: l'integrale definito tra a e b di $f(x)dx$ è uguale alla differenza tra la primitiva della funzione $f(x)$ calcolata in b e in a quindi $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$. Richiamando l'esempio della primitiva precedente si ha: $\int_0^2 x^3 dx = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$. Richiamando inoltre il significato geometrico si ha che l'area del trapezoide avente per estremi 0 e 2 e sotteso dalla curva $y = x^3$ vale 4 unità di misura.

Considerazione: quanto espresso in quest'ultima sezione operativa dell'integrale mette ulteriormente in risalto lo straordinario messaggio matematico contenuto nell'integrale espresso:

1. dal fatto sorprendente dovuto all'aspetto operativo dell'integrale indefinito visto come operazione **inversa della derivata**. Tale fatto è logicamente imprevedibile mentre invece è stato possibile dimostrarlo attraverso il passaggio al limite che contiene come più volte detto un'anima a noi imprescrutabile;
2. un ulteriore eccezionalità espressa dal collegamento tra l'integrale indefinito inteso come primitiva della $f(x)$ e il calcolo dell'integrale definito esprime nel caso di entità riferite a superfici il calcolo esatto di un'area. Proprio questo secondo punto che può essere ampliato ai volumi, alle lunghezze ecc. esprime la potenza matematica che collega la parte puramente algebrico-analitica con quantità misurabili geometricamente. Va detto che l'integrale trova una sua **naturale collocazione** in ogni campo della scienza, in particolare della fisica e nella tecnologia. Ciò sottolinea **il ruolo particolarmente efficiente di collegamento** che l'integrale ha tra una dimen-

sione **ritenuta astratta e quella reale cioè tra la dimensione asensoriale e quella sensoriale**, tra l'idea e la sua realizzazione. Il cuore straordinariamente logico di tutto ciò risiede nel dA come entità differenziale detta anche elementare.

Riflessione: sembra proprio che l'integrale sia stato fornito all'uomo per riflettere sull'importanza **del molto piccolo** riferito alla grandezza differenziale, indicando che in essa è contenuta **quella verità che fatta crescere è un eccezionale aiuto fornendo risultati veri in quanto corretti**. Vi è quindi un'esortazione all'atto di umiltà che non è arrendevolezza ma consapevolezza di dover assumere dimensioni molto piccole per meglio essere testimoni di valori molto grandi.

UNITA' DIDATTICA 9 - INFINITESIMI E INFINITI: GLI ASINTOTICI

Fra le grandi produzioni matematiche dovute al passaggio al limite i concetti rispettivamente di infinitesimo e infinito occupano una posizione preminente in quella straordinaria fioritura relativa allo sviluppo e alla crescita della cosiddetta analisi infinitesimale. Anche in questa unità didattica cercheremo di rendere l'argomento il più sintetico possibile e conservandone però il valore concettuale.

Infinitesimo

La funzione $y=f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow c$ se: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$. Esempio $y = x^3$; $5\sqrt[3]{x}$; $2\sin(x)$ rappresentano altrettanti infinitesimi per $x \rightarrow 0$ mentre $y = \frac{1}{x}$; $\frac{2}{x+1}$; $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ sono infinitesimi per $x \rightarrow \infty$. Ancora $y = (x-1)^2$; $\sqrt[3]{x-1}$; $\ln(x)$ sono infinitesimi per $x \rightarrow 1$. Inoltre i tre gruppi di funzioni rappresentano altrettanti esempi di infinitesimi **simultanei o confrontabili**. Si invita il lettore a comprendere come sia possibile con opportune trasformazioni riportare gli infinitesimi alla tipologia per $x \rightarrow 0$. Infatti se $x \rightarrow \infty$ sarà sufficiente eseguire la posizione $t = \frac{1}{x}$ mentre nel caso in cui $x \rightarrow a$ si ha la posizione $t=x-a$. Per tale motivo ci interessiamo esclusivamente all'infinitesimo del tipo: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Limitando inoltre l'attenzione alle funzione $f(x)$ di tipo algebrico. Come vedremo infatti nell'unità didattica relativa alle serie, gli infinitesimi trascendenti sono riconducibili agli algebrici attraverso i loro sviluppi in serie di **Mac-Laurin**. Il carattere che più interessa dell'infinitesimo è quello relativo al cosiddetto suo **ordine** che esprime una sorta di misura della **velocità** con la quale l'infinitesimo tende a zero. E' come se lo zero fosse un traguardo che può essere raggiunto più o meno rapidamente dai vari corridori espressi dagli infinitesimi. Vediamo di cosa si tratta: consideriamo ad esempio l'infinitesimo $y = x^2$ e $y = x^3$ e assegniamo ad entrambi un valore prossimo allo zero per eccesso; esso sia 0,1. La sostituzione porta rispettivamente a $0,1^2 = 0,01$ e $0,1^3 = 0,001$. Si nota subito che $0,1^3 < 0,1^2$ e quindi l'infinitesimo x^3 a parità del valore assunto dalla x in prossimità dello zero è più vicino al valore zero rispetto all'infinitesimo x^2 cioè x^3 è più piccolo di x^2 e che quindi è **più veloce di x^2 nel raggiungere il traguardo dello zero**. Nel linguaggio degli infinitesimi ciò si esprime dicendo che l'ordine di x^3 è maggiore dell'ordine di x^2 . Si scrive anche la notazione di Landau: $x^3 = o(x^2)$ che si legge " x^3 è più piccolo di x^2 in quanto la o corrisponde all' o (omicron) cioè alla lettera **piccola** della **o greca**". Volendo assegnare il concetto **assoluto** dell'infinitesimo si prende come "unità

di misura" l'infinitesimo $y=x$. Avendo esso come esponente il numero 1 si avrà ord. $x=1$ e in generale ord. $x^n = n$ con $n>0$. Richiamando l'esempio precedente ord. $x^2 = 2$ e ord. $x^3 = 3$. Quindi la potenza esprime la misura della velocità con la quale l'infinitesimo tende a zero. Un altro modo per stabilire l'ordine relativo di due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ è quello di confrontarli. Si hanno i casi:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, che indica come $f(x)$ sia di ordine superiore a $g(x)$. Infatti in tal caso mentre $f(x)$ **ha già raggiunto il valore 0 così non è per $g(x)$, quindi si ha una sorta $\frac{0}{n} = 0$** . Quindi $f(x)=o(g(x))$ cioè $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, che indica come $f(x)$ sia di ordine inferiore a $g(x)$ infatti in tal caso mentre $g(x)$ **ha già raggiunto il valore 0 così non è per $f(x)$, quindi si ha una sorta $\frac{n}{0} \rightarrow \infty$** . Quindi $g(x)=o(f(x))$ cioè $g(x)$ è di ordine superiore a $f(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ **con k numero reale**, che indica come entrambi gli infinitesimi "giungano" allo zero **contemporaneamente**. Quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono dello stesso ordine. Si scrive $f(x) \sim kg(x)$. Nel caso in cui $k=1$ si ha $f(x) \sim g(x)$. Nel primo caso si legge: $f(x)$ equivalente asintoticamente a k volte $g(x)$, mentre nel secondo caso: $f(x)$ equivalente asintoticamente a $g(x)$ o semplicemente $f(x)$ e $g(x)$ sono asintotici cioè hanno lo stesso andamento per $x \rightarrow 0$ al valore 0.

Parte principale di un infinitesimo

Consideriamo l'infinitesimo $F(x) = G(x) + H(x) + \dots$ dove gli addendi sono altrettanti infinitesimi simultanei per $x \rightarrow 0$. Se $g, h \dots$ diversi tra di essi sono rispettivamente gli ordini assoluti di $G, H \dots$ vale il seguente principio: l'ordine di $F(x)$ corrisponde al minor ordine degli infinitesimi addendi. L'infinitesimo corrispondente a tale ordine minore è detto **parte principale dell'infinitesimo (P.P.)** mentre la **parte rimanente è detta parte complementare (P.C.)**. Simbolicamente $F(x)=P.P.+P.C.$ Ritenendo g l'ordine minore potremo scrivere usando il simbolo di Landau $F(x)=G(x)+o(G(x))$ che si legge: $F(x)$ è quell'infinitesimo che ha per parte principale $G(x)$ e parte complementare un infinitesimo di ordine superiore a $G(x)$ e quindi a sé stesso. In sintesi $F(x)=$ infinitesimo ad esso equivalente + infinitesimi di ordine superiore. Esempio $F(x) = x^3 + 5x^2 - x^6$ ammette come P.P. $5x^2$ e come P.C. $x^3 - x^6$. Da cui: $F(x) = 5x^2 + o(x^2)$.

Nel passaggio al limite la parte P.C. tendendo a zero più rapidamente diviene **evanescente** e l'infinitesimo $F(x)$ diviene equivalente alla sua parte P.P. Quindi per $x \rightarrow 0$ $F(x) \sim P.P.$ Tornando all'esempio $F(x) \sim 5x^2$. Si può interpretare tale scrittura come segue: la funzione $F(x)$ si comporta nell'intorno di zero come la sua parte principale; quindi nel caso dell'esempio si comporta come $y = 5x^2$ e cioè come una parabola di secondo grado convessa. Da tutto ciò si evince come la parte principale dell'infinitesimo corrisponda anche al suo **asintotico**. L'aspetto geometrico dell'asintotico è quello di grafico **di accompagnamento della funzione nell'intorno di 0**.

Considerazione: l'infinitesimo attraverso la sua parte principale funge come una sorta di **microscopio** mettendo **in luce** l'andamento della funzione **nell'intorno** cioè in una dimensione piccola a piacere. Ciò è di grande aiuto sia nello studio di funzione sia come contributo nel calcolo numerico. Infatti dovendo calcolare il valore numerico dell'esempio riportato per $x=0,1$ si ha: $F(0,1) \approx 5(0,1)^2 \rightarrow 5(0,01) = 0,05$ valore approssimato ma significativo. In più tale funzione esprime l'asintotico rappresentato dalla parabola convessa che **accompagna la funzione** $y = x^3 + 5x^2 - x^6$ **nell'intorno di 0**.

Un'ulteriore applicazione dell'infinitesimo e del suo asintotico è espresso dal calcolo del limite special modo nelle configurazioni di indecisione di tipo $\frac{0}{0}$. Facciamo degli esempi:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x} = \frac{0}{0}$. Passando agli asintotici $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x} \sim \frac{-3x + o(x)}{2x + o(x)} = -\frac{3}{2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{x + x^3} = \frac{0}{0}$. Passando agli asintotici $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{x + x^3} \sim \frac{x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} \sim x = 0$. Quest'esempio mette in risalto a: che la funzione considerata è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$, b: è asintotica alla funzione $y=x$, c: il suo ordine è uguale a 1, d: nell'intorno di 0 quindi è accompagnata (coincide) con la retta $y=x$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^6}{2x^7 + x^5} = \frac{0}{0}$. Passando agli asintotici $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^6}{2x^7 + x^5} \sim \frac{x^4 + o(x^4)}{x^5 + o(x^5)} \sim \frac{1}{x} = \infty$. Quest'esempio mette in risalto a: che la funzione per $x \rightarrow 0$ è un infinito, b: è asintotica alla funzione $y = \frac{1}{x}$ (iperbole), c: l'ordine di infinito è uguale a 1, d: nell'intorno di 0 quindi è accompagnata all'infinito (coincide) secondo l'iperbole $y = \frac{1}{x}$;

Nota: come accennato all'inizio l'argomento relativo all'infinitesimo sarà ripreso in considerazione dell'unità didattica dedicata alle serie.

Considerazione: è importante sottolineare il ruolo dell'infinitesimo e dell'asintotico nel calcolo del limite. Esso permette di **semplificare** notevolmente tale operazione rifacendosi comunque sia al carattere dominante della parte principale che al considerare la parte complementare come **evanescente** cioè non partecipa al calcolo del limite. Ancora una volta si sottolinea il modello del microscopio espresso dall'infinitesimo; **tale microscopio può essere inteso sia come lettura operativa nell'intorno di 0 che grafica**. Si rammenta inoltre che con semplici sostituzioni è possibile risolvere il caso dell'infinitesimo anche quando la x tende a un valore $c \neq 0$ compreso l'infinito.

L'infinito

La funzione $y=f(x)$ si dice infinito per $x \rightarrow c$ se: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$. Esempi: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 6x + 4 = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{x^3} \sim \frac{1}{x^2} = \infty$. Vale la seguente **gerarchia degli infiniti** per $x \rightarrow \infty$ che indica in modo crescente la **rapidità** con la quale la funzione tende a infinito: $\log x < x^n (n > 0) < a^x (a > 1) < x! < x^x$. Vale nel calcolo dell'infinito il seguente principio di sostituzione: alla somma di più infiniti si può sostituire quello di ordine superiore che esprime la parte principale dell'infinito. Esempio: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 + 2 \sim x^4 + O(x^4)$. Tale scrittura in modo del tutto analogo a quanto detto per l'infinitesimo

ma, con significato appropriato, viene letta nel seguente modo: l'infinito $f(x)$ ha come parte principale x^4 e parte complementare $O(x^4) = \log(x) + 2$. Anche in questo caso la parte principale esprime l'asintotico della funzione, mentre la parte complementare è un infinito di ordine inferiore rispetto alla parte principale. E' quindi l'asintotico che fornisce l'ordine all'infinito compreso il suo andamento. Tornando all'esempio la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$ seguendo "il binario" $y = x^4$. Anche in questo caso l'asintotico è di grande aiuto sia nel calcolo numerico che nello studio di funzione. Volendo calcolare ad esempio $f(10^{10})$ si potrà usare come valore significativamente approssimato il suo asintotico cioè: $f(10^{10}) \approx (10^{10})^4 = 10^{40}$.

Ordine di infinito

Mentre per l'infinitesimo è sempre possibile stabilire l'ordine ciò non è detto per l'infinito. Si potrà in alcuni casi solo stabilire il loro confronto qualitativo. Nel caso di infiniti algebrici l'ordine è dato dall'esponente. Esempio $f(x) = x^3 + x - 1$ per $x \rightarrow +\infty$ ord di $f(x)=3$. Per il confronto fra due infiniti $f(x)$ e $g(x)$ confrontabili si hanno i tre casi:

1. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ comporta che $g(x)$ tenda a ∞ **più rapidamente** di $f(x)$ ottenendo una sorta di $\frac{n}{\infty} \rightarrow 0$. Quindi ordine di $g(x) >$ ordine di $f(x)$;
2. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ comporta che $g(x)$ tenda a ∞ **meno rapidamente** di $f(x)$ ottenendo una sorta di $\frac{\infty}{n} \rightarrow \infty$. Quindi ordine di $g(x) <$ ordine di $f(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ comporta che sia $f(x)$ che $g(x)$ tendano a ∞ **con la stessa rapidità**. Si potrà dire $f(x) \sim kg(x)$ che in particolare per $k=1$ fornisce $f(x) \sim g(x)$ e si esprime dicendo che $f(x)$ è asintotico a $g(x)$ per $x \rightarrow c$.

Riportiamo gli esempi relativi ai casi precedenti:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)+2}{x^3} \sim \frac{\log x}{x^3} = 0$. $Ord(\log(x)+2) < ord(x^3)$. Si noti come non sia possibile conoscere il valore numerico dell'ordine di $\log(x)+2$ ma solo che esso è minore di 3;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x+3^x-x}{\log x+x} \sim \frac{5^x}{x} = \infty$. $Ord(5^x + 3^x - x) > ord(\log x + x)$. Anche in questo caso non è possibile quantificare l'ordine, ma solo confrontarlo;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\log(x+2)-4}{3-\log(2x+1)} \sim \frac{5\log x}{-\log 2x} \sim \frac{5\log x}{-\log 2 - \log x} \sim \frac{5\log x}{-\log x} = -5$. $Ord(5(\log(x+2)-4)) = ord(3 - \log(2x+1))$. Ancora $5\log(x+2)-4 \sim -5(3-\log(2x+1))$;

Considerazioni: anche il caso dell'asintotico relativo all'infinito esprime un **eccezionale strumento** che funge da **telescopio** in quanto permette di **vedere nell'infinitamente lontano** sia dal punto di vista del calcolo che graficamente. L'asintotico è una **sorta di binario che accompagna la funzione alla stazione dell'infinito**.

Anche in questo caso l'asintotico permette di semplificare rendendolo più agevole il calcolo del limite special modo nel caso $\frac{\infty}{\infty}$. Esempio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+x-\log x}}{x^2+2} \sim \frac{x}{x^2} \sim \frac{1}{x} = 0$. Dal calcolo del limite si evince che la funzione è un infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow +\infty$, mentre l'asintoto è l'iperbole $y = \frac{1}{x}$. Quindi la funzione ammette per asintoto orizzontale $y=0$ al quale tende seguendo la curva asintotica $\frac{1}{x}$. Esempio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+\log x}{x+\sin(x)} \sim \frac{x^4}{x} \sim x^3 = \infty$. La funzione $\sin(x)$ in questo contesto essendo oscillante e limitata si comporta da costante e quindi trascurabile rispetto all'infinito x . Dal limite si evince che la funzione è un infinito di ordine 3. Essa tende al $+\infty$ seguendo l'asintotico $y = x^3$ che rappresenta una parabola cubica.

Considerazione: va sottolineato subito l'aspetto di **eccezionale vista** acquisita dalla funzione dopo essersi **inforcata gli occhiali dell'asintotico**.

Riflessione: il carattere maggiormente ricorrente nell'argomento infinitesimi e infiniti è quello relativo alla **rapidità**. Questo ci porta a considerare un **movimento** presente all'interno dell'infinitesimo come dell'infinito, movimento che però non ha riferimenti **spaziali** in senso fisico, ma solo nel senso del calcolo. Quindi l'ambientazione matematico-numerica (analitica) permette l'esistenza di un movimento privo di riferimenti sensoriali, quindi riferita ad una dimensione mistico-metafisica. Ricordiamo infatti che il **simbolo** è ciò che ferma il movimento, mantenendone però il ricordo. Quindi i simboli matematici benché esprimano di per sé grandezze oggettive quindi concettualmente statiche, hanno in sé comunque un **ricordo di movimento** che appare **nel momento del loro confronto**. Tornando al movimento mistico-metafisico ci chiediamo qual è la sua natura. Ora se la matematica tutta, come tra l'altro tutto è un **dono concesso all'uomo**, anche la natura di tale movimento appartiene a tale dono. In coerenza con la fede condivisa dall'autore, tale movimento è voluto dalla Santissima Trinità e reso possibile attraverso lo Spirito Santo. In ciò è contenuta fra l'altro la comprensione di come il Cristianesimo sia il **motore** che conduce verso la comprensione di una realtà superiore riconducibile anche sia come mezzo che fine alla realtà matematica.

UNITA' DIDATTICA 10 - LA FORMULA

Il significato letterale della parola formula scende *dal latino formŭla che è diminutivo di forma che a sua volta ha una probabile discendenza dal greco morphé*. Il concetto di formula richiama quello di forma associando ad essa anche una sorta di **cosa impressa** attraverso un meccanismo di **stampa**. Proprio per questo la formula dal punto di vista estetico esprime una **staticità** come garanzia di una permanenza nel tempo, ciò in coerenza con la sua dimensione di stampa. Quindi la formula possiede di per sé stessa la dimensione di simbolo in quanto **fissa** un concetto mantenendone comunque il ricordo dinamico. Infatti una formula è **suscettibile** di variazioni quando **la memoria del ricordo relativo al concetto** richiama valori la cui **realtà modifica sostanzialmente il contenuto della formula stessa**. Il concetto di formula può essere applicato a un vastissimo campo di indagini come quello filosofico, artistico, linguistico, giuridico, chimico, fisico, musicale, ... matematico. In questo contesto ci interessiamo della formula intesa in senso matematico. Richiaman-

do il significato etimologico della matematica si può affermare che la formula matematica esprime la **forma** simbolica con la quale è possibile **fermare ciò che è ben compreso per renderlo noto come azione rivolta all'altro**. Si evince quindi che già nella significazione etimologica della parola è racchiusa anche la sua dimensione **etica** cioè la veste che essa occupa nel mondo matematico. Non solo la formula è essa stessa un simbolo ma è costituita da un **assemblaggio** di ulteriori simboli sia di tipo operativo che concettuale. E' particolarmente interessante come alcuni di tali simboli abbiano valore costante mentre altri risultano variabili. Tale variabilità resta comunque limitata a certi insiemi di valori che nella loro totalità esprimono il cosiddetto dominio o campo di esistenza della formula. L'insieme dei simboli che costituiscono la formula ingenera una sorta di **forza matematica** che **rende possibile il funzionamento della formula stessa**. Solitamente tale forza viene rappresentata dai simboli-operatori come la somma algebrica, il prodotto, il quoziente, estrazione di radice, la potenza, il logaritmo, la derivata, l'integrale, il limite ecc. I simboli variabili rappresentano invece una **sorta di carburante** che tramite gli operatori fa **"girare la formula" producendone il risultato**. Esempio: la formula: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ha come simboli operativi il -, il +, l'estrazione di radice, il quoziente e il prodotto e la potenza. I simboli variabili sono le lettere a,b,c. Se si vuole limitare i valori delle x così ottenuti all'insieme dei numeri reali dobbiamo effettuare la limitazione: $b^2 - 4ac \geq 0$. Inoltre per garantire l'esistenza della formula il coefficiente a deve essere diverso da zero. Entrambe queste condizioni esprimono il campo di esistenza o di variabilità della formula suddetta. Restando nella dimensione dell'analogia della formula come motore alimentiamola con del carburante: per a=1, b=5, c=6 si ha: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$ da cui $x_1 = -3$ e $x_2 = -2$. Ancora per a=2, b=1, c=-1 si ha: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$ da cui $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Ancora per a=1, b=-2, c=1 si ha: $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$ da cui $x_{1,2} = 1$. In ultimo a=b=c=1: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. In questo caso la formula non produce valori numerici reali in quanto la $\sqrt{3}$ non è un numero reale uscendo quindi dal campo di esistenza. L'esempio mette in luce come la formula abbia una **sua vitalità** agendo come motore che produce i rispettivi risultati **indipendentemente** dal suo significato legato ad un problema che in questo caso espresso dalla ricerca **delle soluzioni reali dell'equazione di secondo grado**. Quindi come struttura logica ogni formula ha una sua autonomia di produzione nei limiti del suo campo di esistenza. Un ulteriore esempio: $x = \frac{a^2 + \sqrt{b}}{c-1}$ con $b \geq 0$ e $c \neq 1$. Tale configurazione logica ha una sua autonomia di produzione numerica originale. Esempio per a=1, b=4, c=2 si ha: $x = \frac{1 + \sqrt{4}}{2-1} = 3$; per a=2, b=25, c=2 si ha: $x = \frac{4 + \sqrt{25}}{2-1} = 9$; per b=-1 e per qualsiasi valore di a e c la formula non produce risultati accettabili in quanto b<0. Ancora una volta si sottolinea l'assoluta indipendenza logica della formula e quindi la sua autonomia e originalità nel produrlo.

Considerazione: da quanto attualmente espresso risulta come la formula si presenti come **una realtà produttiva** attraverso i suoi simboli e quindi come posseda un **diritto di esistere** indipendentemente dal **significato** a essa attribuibile. Comunque essa esprime una sorta di ecologia con l'ambiente matematico in cui è immersa. Tale ecologia è rappresentata dal suo campo di esistenza.

Formule e verità

Sia P un quesito matematico espresso da un preciso linguaggio. Si dice che la variabile x esprime una verità rispetto al quesito P se assumendo il valore $x=v$ risolve il quesito P cioè lo rende una tautologia ovvero una verità in sé. Chi è che fornisce i valori $x=v$? Non sempre è stato possibile stabilire un **meccanismo** che fornisca o parzialmente o totalmente tali valori. In alcuni casi invece ciò è stato reso possibile. Di quest'ultimo caso si riconosce in tale meccanismo una **formula** che riesce a risolvere il problema **della verità** relativa al quesito P. Si ha quindi la **formula di verità**. In tal caso la formula non ha più una sua autonomia ma **nasce come risposta ad un'esigenza di verità**. Ad esempio l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ esprime il quesito P: quali sono i valori reali da assegnare alla x affinché tale equazione si trasformi nella tautologia: $0=0$ (identità)? La formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ esprime la **formula di verità di tale quesito** entro i limiti $a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$. Esempio l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ammette come formula di verità (risolutiva) i valori $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ cioè $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Infatti $2^2 - 5(2) + 6 \rightarrow 0 = 0$ come pure per $x=3$ $3^2 - 5(3) + 6 \rightarrow 0 = 0$. La formula suddetta produce tutti e soli i valori di verità della x associati al quesito espresso dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado.

Considerazione: con l'abbinamento formula-verità, la formula assume una duplice connotazione:

1. essa è collegata ad un quesito P e non è quindi autonoma;
2. essa diviene uno strumento **che sa mettere in luce all'interno del quesito quel meccanismo logico che produce la verità (soluzione) del quesito.**

Riflessione: l'argomento relativo alla formula si presta per via quasi naturale alle seguenti riflessioni che invadono un campo di natura etico-religiosa:

1. la formula nella sua autonomia esprime un essere comunque vitale e quindi dotato di energia assegnatale;
2. **l'esistenza della formula è garantita da una struttura logica la cui fisiologia è fornita dai simboli operazionali e variabili;**
3. tale fisiologia non è comunque sufficiente a dare vitalità produttiva alla formula. E' necessaria comunque un'energia collocata nella formula e generata da quell'atto di fede che l'uomo ripone nel dono della matematica;
4. richiamando la formula come operatore di verità, essa assume una netta valenza di **ulteriore dono** per rendere gestibile una problematica traendone un vantaggio che oltre che a poter essere di natura materiale è sicuramente vantaggioso per la dimensione **spirituale**. Infatti esso esprime un **appagamento** nella ricerca di una verità;

5. non va trascurato il messaggio di coerenza inteso in termini di correttezza espresso dalla **precisione** nell'applicazione della formula. Infatti essa ci **comunica** come sia necessario essere **fedeli** all'applicazione corretta sia dei simboli operazionali che di valori attribuiti al simbolo variabile. E' sufficiente commettere un solo piccolo errore affinché la formula non produca un valore di verità. E' proprio quest'ultimo punto che fa comprendere il significato etico e religioso contenuto nella formula in sé e come operatore di verità. Non è possibile quindi **modificare** anche per poco la formula nella sua globalità senza perdere la sua straordinaria valenza che conduce alla verità vera. E' immediata la coincidenza tra l'indispensabile correttezza nell'applicazione della formula e l'analoga correttezza nei confronti del percorso autentico della fede secondo la legge contenuta nella regola cristiana. Il fedele non può trasformare il Cristianesimo a sua immagine e somiglianza, cioè come gli fa comodo ma viceversa essere lui ad adattarsi in modo rigoroso alla formula della catechesi cristiana. Solo così la **formula del Cristianesimo** può produrre nei confronti del fedele i risultati di **verità vera**. Tenendo conto di come la tecnologia si sviluppa esclusivamente con l'applicazione di formule si ritiene opportuno richiamare l'attenzione su come la verità espressa dalla formula si concretizzi anche nella dimensione pragmatica.

Si conclude la riflessione presentando la formula come un ulteriore straordinario dono che oltre a essere collocato nella dimensione matematica fornisce un meccanismo straordinario di **visione** e **risoluzione** di problemi teorici ma anche pratici quindi un grande aiuto per lo sviluppo dell'uomo. Ritenendo comunque la sua anima di natura divina, la formula deve essere **manipolata con grande rispetto e attenzione, protetta da eventuali rapine, insomma considerandola come uno scrigno di gemme molto preziose la cui collocazione è nel Paradiso.**

UNITA' DIDATTICA 11 - LA SERIE

L'unità didattica che ha per tema la serie è quella che appare più ricca di considerazioni eccezionali trattando un tema che apparentemente non pare degno di considerazione. Infatti per serie numerica si intende la somma di infiniti numeri. La prima lettura superficiale conduce ad un tema che pare esulare tale capacità di una qualsiasi gestione razionale special modo nei confronti del seguente quesito: *la somma di infiniti numeri può avere un valore finito?* La risposta istintiva utilizzando il buon senso strettamente umano è nettamente negativa. Applicando invece a tale quesito una analisi analitica si è potuto stabilire che il comportamento della somma di una serie (suo carattere) può essere di tre tipi:

1. la serie è regolare divergente cioè ha per somma l'infinito;
2. la serie è regolare convergente cioè la sua somma è un numero finito S ;
3. la serie è irregolare divergente cioè la serie non ammette somma né finita né infinita ma oscilla in modo indeterminato.

Ci chiediamo come sia possibile giungere a tali conclusioni. E' fondamentale a questo punto introdurre il concetto di **successione delle ridotte** associata alla serie. Si ricorda che una successione $S=s(m)$ è una funzione la cui variabile è definita nell'insieme dei numeri naturali. Definiamo la successione delle ridotte. Indicando con a_n il termine generico della serie: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$ i termini della successione delle ridotte sono rispettivamente $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots, s_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$ dove s_k è il termine k-mo della successione che lo vede come ridotta k-esima. Quindi alla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è associata la successione $y = s_k$. Al fine dello studio del carattere della serie si è ammesso che la stessa serie e la successione abbiano lo stesso carattere nei confronti rispettivamente **della somma infinita** e del limite per $k \rightarrow +\infty$ della successione s_k . Con maggior chiarezza si ha:

1. se $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \infty$ allora la serie corrispondente è divergente;
2. se $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = S_{finito}$ allora la serie è convergente al valore S e cioè ha per somma S;
3. se $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \text{non esiste}$, allora la serie è irregolare.

In generale lo studio del carattere della serie è reso particolarmente difficoltoso dal fatto di non poter stabilire facilmente **la legge con la quale si esprime s_k** . Ciò obbliga a trovare dei metodi sostitutivi detti criteri di convergenza di cui parleremo in seguito. Scegliamo come esempio la serie geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$. Fortunatamente per essa è possibile stabilire **la legge della successione delle ridotte**: $s_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$. Quindi il carattere della serie è legato al comportamento del seguente limite: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - q^{k+1})$. Possiamo avere i casi:

1. se $q > 1$ q^k è un infinito per cui il limite tende a infinito e la serie è divergente. Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty$;
2. se $-1 < q < 1$ allora q^k diviene un infinitesimo cioè $\lim_{k \rightarrow +\infty} q^k = 0$ da cui la successione s_k converge al valore finito $S = \frac{1}{1-q}$. La serie è quindi convergente e ha per somma S cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Per $q = \frac{1}{2}$ la somma della serie è $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$;
3. se $q \leq -1$ il limite della successione s_k non esiste in quanto oscillante limitato o illimitato. Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n$, in tal caso q^n oscilla fra $+\infty$ e $-\infty$ non garantendo così il valore di limite;
4. per $q=1$ $s_k = k$ quindi il suo limite per $k \rightarrow +\infty$ è uguale a $+\infty$ e quindi la serie diverge.

Considerazione: in generale risulta interessante riflettere su come l'analisi analitica permetta di evincere un **valore finito** per una somma di **infiniti termini**, fatto che avviene solo se sono soddisfatti certe condizioni. Richiamando il secondo esempio e quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}^n =$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ come sarebbe possibile utilizzando il solo buon senso stabilire che tale somma fornisca un valore finito e **esattamente uguale a 2**? Consideriamo ancora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ in tal caso il solo buon senso farebbe credere che la somma è uguale a zero in quanto gli addendi apparentemente si semplificano a coppie. La teoria legata alla serie riconosce in essa la serie geometrica oscillante essendo $q=-1$. Essa quindi **smaschera la falsità della conclusione superficiale**. E' opportuno richiamare a tale proposito quanto affermato nell'unità didattica relativa alla **formula**. Infatti in questo caso la formula esprime il modello concettuale legato al limite per $k \rightarrow +\infty$ di s_k . Essa infatti è **la legge** che applicata correttamente permette di **vedere** il comportamento della serie a $+\infty$ cioè di potenziare in modo eccezionale la vista razionale dell'uomo ampliandone vistosamente le doti naturali.

Critério asintotico

Si è detto che una delle maggiori difficoltà nel determinare il carattere di una serie risieda nel fatto di non poter determinare in generale con esattezza la legge $y = s_k$. Viene in aiuto il criterio asintotico: date le serie (1) $\sum a_n$ e (2) $\sum b_n$ se i termini generici a_n e b_n sono asintotici per $n \rightarrow +\infty$ allora le serie (1) e (2) hanno lo stesso carattere. A tal fine si assume come serie di riferimento la serie di Riemann detta anche armonica generalizzata: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ che per $\alpha > 1$ converge. Consideriamo a tale proposito la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^3+5} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n^3+5} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, quindi la serie considerata è asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che è Riemann convergente. Quindi essa è convergente. Esistono altri criteri di convergenza per i quali si rimanda a testi specifici.

Considerazione: anche nel caso del criterio asintotico si richiama l'unità didattica relativa agli asintotici per far comprendere come anche nel tema del comportamento all'infinito di una sommatoria intervenga **quella gerarchia di rapidità** che è alla base dell'algebra di tali operatori appartenente all'analisi matematica.

La serie di funzioni

Il tema delle serie appare ancora più interessante se il termine generico anziché essere un numero è una funzione. Si scrive in questo caso $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$. Volendo rimanere entro una trattazione elementare consideriamo in particolare il caso in cui $f_n(x) = g(n)x^n$ cioè alle serie di potenze. Per $g(n)=c$ costante esse si riducono alla serie geometrica. Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} 3x^n = \frac{3}{1-x}$ per $-1 < x < 1$. In tal caso la somma è una funzione che in specifico rappresenta l'iperbole $y = \frac{3}{1-x}$ limitata nell'intervallo $(-1,1)$. Assumono particolare interesse gli sviluppi in serie di potenze di Mac-Laurin. Si ricorda che Colin Mac-Laurin fu della generazione successiva a quella di Newton vissuto fra il 1698 e il 1746. La sua serie permette di **sviluppare nell'intorno di $x=0$ una funzione ordinaria** tramite la formula: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0^n \frac{x^n}{n!} = f_0 + f_0'x + f_0'' \frac{x^2}{2!} + \dots$ Tale formula ha consentito di **tradurre come somma di potenze, funzioni non algebriche (trascendenti)** delle quali si riportano degli esempi:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Considerazione: la serie di Mac-Laurin riferita alle serie trascendenti ha permesso di evidenziare per $x \rightarrow 0$ l'ordine di infinitesimo considerando la loro parte principale. Si ha quindi che $e^x - 1$, $\sin(x)$ e $\log(x+1)$ sono infinitesimi di ordine 1, mentre $\cos(x)-1$ è di ordine 2. Ciò permette di estendere ai limiti di funzioni trascendenti quanto detto per gli infinitesimi di tipo algebrico. Facciamo degli esempi:

1. data la funzione $\sin(x)-x$ stabilirne l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) - x \sim x - \frac{x^3}{3!} + O(x^3) - x = \frac{x^3}{3!} + O(x^3)$. Essendo $P.P = x^3$ la funzione è un infinitesimo del terzo ordine;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1+x^3}{e^{x^2}-1} = \frac{0}{0}$. Applicando gli sviluppi si ha: $\sim \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) + x^3}{x^2 + o(x^2)} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Una considerazione va spesa per ricordare che sia le serie numeriche che quelle di funzioni e tra queste in particolare le serie trigonometriche o di Fourier trovano ampia applicazione nella tecnologia relativa al campo della fisica elettronica sia per le comunicazioni che per applicazioni di tipo medico. In tal modo si richiama ancora una volta l'inscindibile coinvolgimento tra il mondo **astratto** della matematica e quello **sensoriale** del mondo pragmatico.

Riflessione: la serie richiama i temi fondamentali relativi alle altre unità didattiche e cioè:

1. la **potenza espressa dalla capacità di leggere** il comportamento di una somma che abitualmente coinvolge un numero finito di termini al caso in cui tale numero sia infinito, cioè da una somma di termini in numero limitato al caso in cui tale numero sia illimitato. Quindi la struttura logica della serie permette di **accompagnare** la dilatazione infinita relativa all'operazione di somma. Essa quindi rappresenta un dono che oltre a permettere l'estensione all'infinito fa conservare in tale dimensione la capacità di sommare;
2. il legame operativo tra la successione delle ridotte e il carattere della serie indica come sia importante **il modo** con il quale i termini della serie si susseguono al suo interno. Ciò vuole essere un richiamo di natura etica del come sia importante non solo il percorrere una via (la somma infinita), ma il modo con cui essa viene percorsa (la legge delle s_k);
3. la serie convergente è un forte esempio di come ciò che appare infinito e quindi in generale confuso possa avere invece un significativo segnale di verità (espresso dal valore della somma) sia numerica che funzionale;

4. mentre l' accettare una realtà finita come somma di infiniti termini appare ed è una follia illogica senza l'aiuto di una legge, così tale realtà diviene verificata e quindi accettabile con l'utilizzo di una ben precisa legge espressa in questo caso dai criteri di convergenza. E' la legge quindi ispirata da intuizioni logiche che rende possibile passare da una situazione di caos ad una di comprensione anche in termini razionali. Qual è la natura di tale legge? Non esiste certo una risposta **onestamente** razionale a tale domanda, ma le testimonianze dei grandi matematici che hanno reso accessibili tali verità svelandone le formule che ne esprimono le leggi. Essi infatti hanno voluto abbandonare la comprensione della **causa prima**, non perché essa non ci fosse ma perché essa **sfugge alle possibilità della mente umana**. Quindi la dimensione metafisica che precede quella logica-razionale viene fatta rientrare in un collegamento invisibile ma accettabile per fede tra l'uomo e Dio. Tale consapevolezza deve essere comunque presente nell'uso dell'intelligenza (anch'essa dono di Dio) nella sua opera legata alla scoperta scientifica. Si ricorda infatti come scienziati del calibro di Maxwell avessero come riferimento e guida la fede cristiana che serviva anche da equilibratore tra il pensiero e l'ispirazione di natura matematico-fisica;
5. l'importante ricaduta della serie come operatore essenziale nelle applicazioni tecnologiche ormai vitali nel contesto della vita contemporanea è di incisivo richiamo a considerare le riflessioni predette anche nel contesto concreto nella vita quotidiana. Infatti le telecomunicazioni, l'informatica, il digitale, la telefonia ecc. poggiano la loro esistenza e funzionalità sul concetto di serie. La serie quindi è un ulteriore strumento con il quale **Dio ci educa sia ad apprezzare i suoi doni sia a migliorare la nostra realtà terrena avente però presente l'origine di tale realtà**. Nell'elevata astrazione matematica e nella sua rispondenza nel mondo delle applicazioni scientifiche permettono all'uomo, accompagnato dalla fede, di evolversi nella dimensione mentale e spirituale, rendendolo più pronto e sensibile a tutte quelle verità che spesso non sono facilmente comprensibili, ma che la loro natura e riconoscimento sono essenziali per far vivere all'uomo quella dimensione in più che lo rende sempre più vicino a quello che Dio ha pensato per lui cioè la felicità eterna.